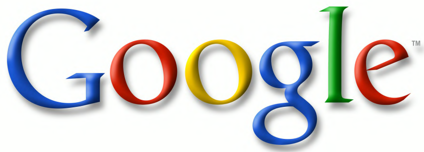


L. A. Sohncke's

Sammlung von Aufgaben

aus der

Differential- u. Integralrechnung.

Erster Teil:

Differentialrechnung.

Herausgegeben

von

Prof. Dr. Hermann Amstein.
Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik
an der Akademie in Lausanne.

Sechste verbesserte Auflage

bearbeitet von

Dr. Martin Lindow.

Mit 124 in den Text gedruckten Figuren.

Halle a. S.,
Verlag von H. W. Schmidt.
1903.

L. A. Sohncke's

Sammlung von Aufgaben

aus der

Differentialrechnung.

Herausgegeben

von

Prof. Dr. Hermann Amstein,
Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik
an der Akademie in Lausanne.

Sechste verbesserte Auflage

bearbeitet von

Dr. Martin Lindow.

Mit 124 in den Text gedruckten Figuren.

Halle a. S.,
Verlag von H. W. Schmidt.
1903.

Vorwort zur vierten und fünften Auflage.

Die Aufgabensammlung von Sohncke hat durch drei Auflagen hindurch ihre Brauchbarkeit bewährt. Wie sie manchem Lehrer beim Unterricht in der Differential- und Integralrechnung als Sammlung von zweckmässigen Beispielen lieb geworden ist, so hat sie auch vielen Studierenden an Universitäten und polytechnischen Schulen willkommenes Übungsmaterial geliefert. Dass Einzelnes, wie es in den bisherigen Auflagen enthalten ist, den durch das jetzt allgemeiner verbreitete und intensiver gewordene Studium der mathematischen Wissenschaften so hoch gesteigerten Anforderungen gegenüber nicht mehr denselben Wert besitzt, wie beim ersten Erscheinen des Buches und Anderes geradezu veraltet ist, liegt in der Natur der Sache. Nichtsdestoweniger schien mir das Buch des Brauchbaren und Wertvollen so viel zu enthalten, dass ich auf den Wunsch des Herrn Verlegers die Besorgung der vierten Auflage gern übernahm. Ich verhehlte mir dabei die eigentümliche Schwierigkeit nicht, die darin lag, bei Berücksichtigung des ursprünglichen Charakters des Buches den Bedürfnissen der Jetztzeit möglichst gerecht zu werden.

Mein Hauptaugenmerk musste dahin gehen, den Mängeln möglichst abzuhelfen, welche sich bei langjährigem Gebrauche des Buches herausgestellt hatten. So sind sämtliche, die einzelnen Beispielgruppen einleitenden Erklärungen, Regeln u. s. w. vollständig umgearbeitet worden. Sodann habe ich, um eine möglichst grosse Korrektheit zu erzielen, sämtliche Beispiele auf's Neue selbst durchgerechnet und die dabei aufgefundenen, zahlreichen Fehler verbessert. Die Lösung derjenigen Aufgaben, welche erfahrungsgemäss den Studirenden grössere Schwierigkeiten darboten, ist noch mehr als

in früheren Ausgaben durch kurze Anleitungen erleichtert worden; auch habe ich, wo mir dies nötig schien, die Anzahl der Beispiele vermehrt. Die mannigfaltigen grösseren und kleineren Änderungen, welche ich nach sorgfältiger Überlegung und bei möglichster Schonung des vorhandenen Guten im Interesse der Sache vornehmen zu müssen glaubte, hier anzugeben, würde zu weit führen. Der unparteiische Sachverständige wird diese Änderungen und die Gründe, die mich hierbei geleitet haben, wie ich hoffe, billigen.

Der erste Abschnitt über die Differentialquotienten algebraischer und transzendenter Funktionen, der sich durch die Reichhaltigkeit und Brauchbarkeit seiner Beispiele vor allen andern auszeichnete, ist nahezu unverändert beibehalten worden. Im früheren vierten, jetzigen fünften Abschnitt wurden jeder wichtigeren unendlichen Reihe die Gültigkeitsgrenzen beigesetzt; dagegen konnten auch in dieser neuen Ausgabe Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen, als in die algebraische Analysis gehörig, selbstverständlich keine Aufnahme finden. Die kurze Anleitung zur näherungsweisen Lösung numerischer Gleichungen mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes, welche diesem Abschnitt beigegeben ist, wird manchem Studierenden nicht unwillkommen sein. Der fünfte Abschnitt der dritten Auflage über die hyperbolischen Funktionen konnte bei dem beschränkten Raume des Buches nicht mehr aufgenommen werden. Die Untersuchung der Kurven und Oberflächen ist, soweit dies tunlich erschien, den neueren Anforderungen an Symmetrie entsprechend umgearbeitet worden.

Seit dem ersten Erscheinen der Sohncke'schen Aufgabensammlung im Jahre 1850 ist dieselbe für viele der nachfolgenden, ähnlichen Sammlungen, auch für solche, welche jetzt vornehm auf ihre Vorgängerin glauben herabblicken zu müssen, zu einer reichen Fundgrube geworden, so dass es gewiss in der Natur der Sache liegt, wenn jetzt die Zinsen und Zinseszinsen des von Sohncke angelegten Kapitals dem Buche selbst wieder zugeflossen sind. Es haben dem Bearbeiter der vierten Auflage namentlich die beiden trefflichen französischen Übungsbücher Brahy: Exercices méthodiques de calc. diff. und Frenet: Recueil d'exercices sur le calc. infinitésimal, sowie die englischen Lehrbücher Tothunter: A

treatise on the differential calculus und Salmon: Analytische Geometrie des Raumes (deutsch bearbeitet von Herrn Prof. Fiedler) wesentliche Dienste geleistet.

Auf die Korrektur ist sowohl von Seite des Herrn Verlegers, wie auch von Seite des Herausgebers die grösste Sorgfalt verwendet worden. Die dessenungeachte stehengebliebenen, wenigen Druckfehler bitte ich vor dem Gebrauche des Buches verbessern zu wollen.

Zürich, im Oktober 1874.

H. Amstein.

Vorwort zur sechsten Auflage.

Bei der vorliegenden sechsten Auflage des altbewährten Werkes hat sich die Notwendigkeit herausgestellt, dasselbe einer neuen, gründlichen Bearbeitung zu unterziehen und einige wichtige Änderungen an demselben vorzunehmen, jedoch so, dass der bisherige Charakter des Werkes möglichst gewahrt blieb. Die am meisten in die Augen fallende Änderung besteht in der Einfügung der Figuren in die entsprechenden Stellen des Textes, während sie bisher in einem besonderen Hefte erschienen. Ich hoffe, dadurch das Studium der Sammlung angenehmer gemacht zu haben. Natürlich sollen sie zu selbständigen Zeichnungen anregen und zur Probe auf deren Richtigkeit dienen.

Das bisherige letzte Kapitel, Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie, habe ich in 3 Kapitel zerlegt und die Aufgaben systematisch geordnet, wodurch ich, ebenso wie durch das ausführlichere Inhaltsverzeichnis, eine grössere Übersichtlichkeit erreicht zu haben hoffe.

Dass Druckfehler und Unrichtigkeiten möglichst ausgemerzt wurden, sowie dass die neue Rechtschreibung eingeführt wurde, bedarf kaum der Erwähnung. Endlich ist besondere Sorgfalt auf den Druck verwandt worden.

Leider hat Herr Verlagsbuchhändler H. W. Schmidt, von dem ich den höchst ehrenvollen Auftrag der Bearbeitung erhielt, die Vollendung des Druckes nicht mehr erlebt; seine unermüdliche und erfolgreiche Tätigkeit sichern ihm ein bleibendes Andenken.

Göttingen, im Juni 1903.

M. Lindow.

Inhalt.

Kapitel IV.

Differentiale unentwickelter Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen.

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Kapitel V.

Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz.

Kapitel VI.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des wahren Wertes einer Funktion, die für einen speziellen Wert der Veränderlichen in unbestimmter Form erscheint.

Kapitel VII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen.

Kapitel VIII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung ebener Kurven.

Kapitel IX.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Raumkurven.

Kapitel X.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung krummer Oberflächen.

Kapitel I.

Differentialquotienten erster Ordnung von entwickelten Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 1. Grundformeln und allgemeine Regeln.

Bezeichnen $u, v, w, \ldots$ Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und sind $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}, \ldots$ die Differentialquotienten dieser Funktionen und $A, B, C, \ldots$ Konstanten, so gelten folgende allgemeinen Gesetze:

I. $y = u \pm v \pm w \pm \ldots$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$$

Zusatz: $y = C$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

II. $y = Au$

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx}$$

Zusatz: $y = Au \pm Bv \pm Cw \pm \ldots$

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx} \pm B\frac{dv}{dx} \pm C\frac{dw}{dx} \pm \ldots$$

III. $y = uv$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Zusatz 1: $y = uvw$

$$\frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}$$

Zusatz 2: $y = uv$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

Der Differentialquotient einer Funktion, dividiert durch die Funktion, wird der *logarithmische* Differentialquotient dieser Funktion genannt.

IV. $y = \frac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Zusatz 1: $y = \frac{1}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Zusatz 2: $y = \frac{u}{v}$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} - \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

V. $y = u^n$

$$\frac{dy}{dx} = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx},$$

wo n irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl bedeutet, welche von x unabhängig ist.

Zusatz 1: $y = \sqrt{u}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

Zusatz 2: $y = u^n$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = n\,\frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Ist u eine Funktion von x und $F(u)$ eine Funktion von u, so wird $F(u)$ eine *mittelbare* Funktion von x genannt, und es gilt der Satz:

VI. $$\frac{dF(u)}{dx} = F'(u)\frac{du}{dx}$$

wo $F'(u) = \frac{dF}{du}$ die in Bezug auf u genommene Ableitung von $F(u)$ bezeichnet.

Ist $y = f(x)$, und bezeichnet man diejenige Funktion von y, welche für jeden Wert von y den aus der Gleichung $y = f(x)$ hervorgehenden Wert von x angibt, mit $\varphi(y)$, sodass also $x = \varphi(y)$ oder $f[\varphi(y)] = y$ ist, so heisst diese Funktion $\varphi(y)$ die **inverse** Funktion der Funktion $f(x)$, und es gilt die Gleichung:

$$\text{VII.} \quad \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}.$$

§ 2. Beispiele zur Differentiation einfacher algebraischer Funktionen.

1) $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

2) $y = a \, . \, x^n$

$$\frac{dy}{dx} = n \, . \, a \, . \, x^{n-1}$$

3) $y = \frac{x^n}{a} + b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{a}\,x^{n-1}$$

4) $y = (a + b\,x)^m$

$$\frac{dy}{dx} = m\,b\,(a + b\,x)^{m-1}$$

5) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2\,x^6 + \frac{4}{7}x^7$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\,(1 - 6\,x + 13\,x^2 - 12\,x^3 + 4\,x^4)$$

6) $y = \frac{1}{m}\,x^m - p\,x^{p-1} + q$

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} - p\,(p-1)\,x^{p-2}$$

7) $y = 9\,x^7 + 3\,x^{-5} - 3\,x^{-11} - a\,x^{-m}$

$$\frac{dy}{dx} = 63\,x^6 - 15\,x^{-6} + 33\,x^{-12} + a\,m\,x^{-(m+1)}$$

8) $y = 3\,x^{\frac{7}{3}} - 4x^{1\frac{3}{4}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{7}\,x^{-3\frac{1}{2}} + 7\,.\,5^{-\frac{3}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 7\,x^{\frac{4}{3}} - 7x^{\frac{3}{4}} + 6x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-4\frac{1}{2}}$$

9) $y = [a + b\,x + c\,x^2 + e\,x^3]^m$

$$\frac{dy}{dx} = m\,(b + 2\,c\,x + 3\,e\,x^2)\,(a + b\,x + c\,x^2 + e\,x^3)^{m-1}$$

10) $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{m}{n}\sqrt[m]{x^n} - \frac{p}{\sqrt[p]{x^q}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[m]{2^q}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x^4} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[m]{x^n}}{x} + \frac{q}{x\sqrt[p]{x^q}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

11) $y = \sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^m}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}(b + 2cx + 3ex^2)\sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^{m-n}}$

oder $= \frac{m(b + 2cx + 3ex^2)}{n\sqrt[n]{(a + bx + cx^2 + ex^3)^{n-m}}}$

12) $y = \frac{1}{a - bx + cx^2} + \frac{e}{(m + nx^3 + px^5)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b - 2cx}{(a - bx + cx^2)^2} - \frac{2ex^2(3n + 5px^2)}{(m + nx^3 + px^5)^3}$

13) $y = (a + bx)(c + ex)$

$\frac{dy}{dx} = ae + bc + 2bex$

14) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[5]{3^4}}$

$\frac{dy}{dx} = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$

15) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 81x^2 - 108x\sqrt[3]{x^2} + 24x + 4\sqrt[3]{x^2} = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2$

16) $y = 2\sqrt[3]{x}\left[\frac{54}{5}x\sqrt[3]{x} + \frac{108}{11}x\sqrt{x} + \frac{27}{7}\sqrt[6]{x^5} + \frac{72}{7}\sqrt[4]{x} + 9 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x}\right]$

$\frac{dy}{dx} = 36\sqrt[3]{x^2} + 36\sqrt[6]{x^5} + 9\sqrt[6]{x} + \frac{12}{\sqrt[12]{x^5}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

17) $y = \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} - \frac{18}{17}x^2\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{x^5}(4 - 3x + x\sqrt{x}) = \sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x} + 1)(2 - \sqrt{x})^2$

18) $y = x^3\left[\frac{2}{11}x^2\sqrt{x} - \frac{72x}{23\sqrt[6]{x}} + \frac{16}{3}\right]$

$\frac{dy}{dx} = x^2(x^2\sqrt{x} - 12\sqrt[6]{x^5} + 16) = x^2(\sqrt[6]{x^5} - 2)^2(\sqrt[6]{x^5} + 4)$

19) $y = (6x^2 - \frac{1}{5}x^5)^4$

$\frac{dy}{dx} = 4x^7(12 - x^3)(6 - \frac{1}{5}x^3)^3$

20) $y = \sqrt[3]{3x - 2x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{4}{3}x}{\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}}$

22) $y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4 + 2\sqrt{3x} + 3x^2)^2}}$

21) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x(4 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^2 - x^3}}$

23) $y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3 + 4\sqrt[3]{2x}}}$

24) $y = \sqrt[4]{\left\{2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}\right\}^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{8}(x + 1)\sqrt[3]{1 - x} - \frac{1}{2}x\sqrt{x}}{x\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{1 - x}\sqrt[4]{2\sqrt{x}(x - 1) + x\sqrt[3]{(1 - x)^2}}}$

25) $y = \sqrt[5]{(a + x^2)^4}\sqrt[3]{(a + x^2)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{44}{15}x\sqrt[15]{(a + x^2)^7}$

26) $y = (5 + 3x)\sqrt{6x - 5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{27x}{\sqrt{6x - 5}}$

27) $y = \sqrt{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{2\sqrt{a^3 - x^3}}$

28) $y = (3x^2 + 5ax - 2a^2)\sqrt{a^2 + 3x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5a^3 + 30ax^2 + 27x^3}{\sqrt{a^2 + 3x^2}}$

29) $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)\sqrt[3]{(a + bx)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a + bx}}$

30) $y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2\sqrt{4a + 6bx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}b(3bx - 2a)(21bx + 2a)\sqrt{6bx + 4a}$

31) $y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4 + a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

32) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})\sqrt{1 + x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

33) $y = \frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

34) $y = (40 - 12x + \frac{27}{5}x^2)\sqrt{5 + 3x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{81x^2}{2\sqrt{5 + 3x}}$$

35) $y = (\frac{10}{3} - 2x + x^2)\sqrt{(5 + 2x)^3}$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^2\sqrt{5 + 2x}$$

36) $y = (4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7}$

$$\frac{dy}{dx} = 28x\sqrt[3]{3x + 7}$$

37) $y = \left\{\frac{2}{3x^2} + \frac{28}{27x}\right\}\sqrt{7x^2 - 9}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18}{x^4\sqrt{7x^2 - 9}}$$

38) $y = \left\{\frac{3}{x^7} + \frac{2}{x^5}\right\}\sqrt{(3 - 5x^2)^5}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{63}{x^8}\sqrt{(3 - 5x^2)^3}$$

39) $y = \left[\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right]\sqrt{3x + x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2\sqrt{3x + x^2}}$$

40) $y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7 + 4x^3)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7 + 4x^3}}$$

41) $y = (3x^4 + 4)\sqrt[4]{9x^4 - 3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4 - 3)^3}}$$

42) $y = \left\{7 - \frac{6}{x^2}\right\}\sqrt[7]{\left(3 + \frac{6}{x^2}\right)^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{720}{7x^5\sqrt[7]{\left(3 + \frac{6}{x^2}\right)^4}}$$

43) $y = (\frac{96}{77} - \frac{8}{11}\sqrt[9]{4x^5} + \frac{1}{3}x\sqrt[9]{16x})\sqrt[4]{(3 + \sqrt[9]{4x^5})^7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25}{36}\sqrt[3]{4x^2}\sqrt[4]{(3 + \sqrt[9]{4x^5})^3}$$

44) $y = \frac{1}{a^2 - ax + x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{(a^2 - ax + x^2)^2}$$

45) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

46) $y = \frac{x^3 + a x^2 + a x + 1}{x + 1}$

$\frac{dy}{dx} = 2x + a - 1$

47) $y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 a^2 x}{(a^2 + x^2)^2}$

48) $y = \frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{6(5 - x^2)}{(5 - 3x + x^2)^2}$

49) $y = \frac{(8x^4 + 4x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 1}}{15 x^5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^6 \sqrt{x^2 - 1}}$

50) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$

51) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 a^2 x}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}$

52) $y = x\sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 + abx - b^2 x^2}{(a - bx)\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$

53) $y = \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{[\sqrt{1 + x^2} - x]^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

54) $y = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2[\sqrt{1 + x^2} + x]^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

55) $y = \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$

56) $y = \frac{5 b^3 x^3 + 30 a b^2 x^2 + 40 a^2 b x + 16 a^3}{(a + bx)^2 \sqrt{a + bx}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5 b^4 x^3}{2(a + bx)^3 \sqrt{a + bx}}$

57) $y = \frac{\sqrt{(4x^3 - 5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2 + 1)^2}} - \sqrt{4(2^3 - 5)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{[190 x^4 + 54 x^2 + 100 x]\sqrt{4x^3 - 5}}{3\sqrt[3]{(5x^2 + 1)^5}}$

58) $y = \frac{2x^4}{(9x - 13)^3 \sqrt{9x^2 - 13x}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{91 x^3}{(9x - 13)^4 \sqrt{9x^2 - 13x}}$

59) $y = \dfrac{108 - 18\sqrt{x} - 3x - \frac{5}{8}x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x}{9\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^4}}$

60) $y = \dfrac{\frac{9}{320}x^4 - \dfrac{1}{8x^2}}{\sqrt[3]{(20-3x^6)^2}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5}{x^3\sqrt[3]{(20-3x^6)^5}}$

61) $y = \dfrac{\dfrac{3}{x^2} + 20x^3 + \frac{200}{9}x^9}{\sqrt{(3+5x^6)^3}}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{27}{x^4\sqrt{(3+5x^6)^5}}.$

62) $y = [\sqrt{x^3} - \tfrac{1}{40}]\sqrt[3]{(\tfrac{1}{4} + 6\sqrt{x^3})^5}$

$\dfrac{dy}{dx} = 24x^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{4} + 6\sqrt{x^3})^2}$

63) $y = \dfrac{1}{5\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^5}} - \dfrac{1}{8\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^8}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4}{\sqrt[3]{(x^3+1)^{11}}}$

64) $y = \sqrt[3]{5+7\sqrt{x}}\left\{\dfrac{9(5-21\sqrt{x})}{50\sqrt[3]{x^2}} + \tfrac{3}{49}(7\sqrt{x}-15)\right\}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt[3]{x^5} - 3}{\sqrt[3]{x^5(5+7\sqrt{x})^2}}$

§ 3. Definitionen und Grundformeln für transzendente Funktionen.

Die einfachsten transzendenten Funktionen sind diejenigen, welche aus der Exponentialfunktion, aus den trigonometrischen Funktionen und aus der Umkehrung dieser Funktionen, nämlich aus den Logarithmen und den zyklometrischen Funktionen hervorgehen.

Die Exponentialfunktion e^x ist definiert durch die für jeden endlichen Wert von x unbedingt konvergente Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \text{ in inf.,}$$

wobei $e = 1 + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3} + \ldots$ in inf. $= 2{,}718281828\ldots$

Aus der Umkehrung der Exponentialfunktion e^x gehen die natürlichen (Neper'schen) Logarithmen, deren Basis e ist, hervor, sodass,

wenn
$$y = e^x,$$
$$x = \log.\ \text{nat.}\ y.$$

In der Folge werden die natürlichen Logarithmen durch ein dem zu logarithmierenden Ausdruck vorgesetztes l bezeichnet.

Die Logarithmen in Beziehung auf die Basis 10, welche durch ein dem zu logarithmierenden Ausdruck vorgesetztes log bezeichnet werden sollen, werden Brigg'sche oder gemeine Logarithmen genannt.

Zwischen dem Brigg'schen und dem natürlichen Logarithmus einer Zahl z besteht die Beziehung
$$\log z = \frac{l\,z}{l\,10}$$

Allgemein gilt zwischen den Logarithmen einer Zahl z in Beziehung auf die zwei Grundzahlen a und b der Satz
$$\overset{b}{\log}\, z = \frac{\overset{a}{\log}\, z}{\overset{a}{\log}\, b},$$

woraus folgt
$$\overset{b}{\log}\, a \,.\, \overset{a}{\log}\, b = 1.$$

Die konstante Zahl $\frac{1}{l\,b} = \overset{b}{\log}\, e$, mit welcher man den natürlichen Logarithmus einer Zahl z multiplizieren muss, um den Logarithmus der nämlichen Zahl z in Beziehung auf die Basis b zu erhalten, heisst Modulus des zur Basis b gehörenden Logarithmensystems.

Es ist demnach der Modulus des Brigg'schen Logarithmensystems
$$\frac{1}{l\,10} = \log e = 0{,}434294482\ldots$$

Umgekehrt findet man den natürlichen Logarithmus einer Zahl, indem man den Brigg'schen Logarithmus derselben mit dem reziproken Werte des Modulus
$$\frac{1}{\log e} = l\,10 = 2{,}302585093\ldots$$

multipliziert. Die Multipla dieser beiden Zahlen, deren Kenntnis die wirkliche Berechnung abkürzt, findet man in jeder gut eingerichteten Logarithmentafel.

Die Erklärung der trigonometrischen Funktionen entlehnt die Analysis der Goniometrie. Während aber in der Goniometrie die unabhängige Variable gewöhnlich als eine Winkelgrösse (ausgedrückt in Graden, Minuten und Sekunden) betrachtet wird, zieht man es in der Analysis vor, die Länge des auf einem Kreise mit dem Radius 1 diesem Winkel als Zentriwinkel entsprechenden Bogens (ausgedrückt in Teilen des Halbmessers) als unabhängige Variable einzuführen.

Zur Verwandlung von Winkelmass in Bogenmass dienen die Gleichungen $\operatorname{arc} 360^0 = 2\pi$, $\operatorname{arc} 180^0 = \pi$, $\operatorname{arc} 90^0 = \frac{1}{2}\pi$,

$$\operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453293\ldots, \quad \operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180.60} = 0{,}000290888\ldots,$$

$$\operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180.60.60} = 0{,}000004848\ldots$$

Die Multipla dieser Zahlen findet man in den Logarithmentafeln. Mit Hülfe dieser Zahlen ergibt sich z. B., dass einem Bogen von der Länge 1 ein Winkel von $57^0\, 17'\, 44{,}806'' = 206264{,}8''$ entspricht. Der Brigg'sche Logarithmus der letzteren Zahl, welcher mitunter gebraucht wird, ist 5,3144251.

Einige Schriftsteller haben für folgende rationalen Funktionen der Exponentialfunktion e^x

$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

die besonderen Benennungen sinus hyperbolicus von x und cosinus hyp. von x und die besonderen Zeichen

$$\mathfrak{Sin}\, x \text{ und } \mathfrak{Cos}\, x$$

eingeführt. Eine wesentliche Abkürzung wird hierdurch nicht erreicht.

Die inversen Funktionen der trigonometrischen sind die zyklometrischen Funktionen $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, etc.

Unter $\operatorname{arc}\sin x$, resp. $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{cotang} x$ ist derjenige zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Bogen des Kreises mit dem Radius 1 zu verstehen, dessen sinus, resp. tangens, cotangens gleich x ist. Mit $\operatorname{arc}\cos x$ wird derjenige zwischen 0 und π

liegende Bogen des Kreises mit dem Radius 1 bezeichnet, dessen cosinus gleich x ist.

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Differentiationsvorschriften, wobei u eine beliebige Funktion von x bedeutet:

VIII. $y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

Zusatz: $y = a^u$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \, l \, a \frac{du}{dx}$$

IX. $y = l\, u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Zusatz 1: $y = \overset{a}{\log} u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{l\,a} \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Zusatz 2: $\frac{du}{dx} = u \,.\, \frac{dy}{dx}$, wobei $y = l\, u$ ist.

X. $y = \sin u$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

XI. $y = \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = - \sin u \frac{du}{dx}$$

XII. $y = \operatorname{tang} u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tang}^2 x) \frac{du}{dx}$$

XIII. $y = \operatorname{cotang} x$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{du}{dx}}{\sin^2 u} = - (1 + \operatorname{cotang}^2 u) \frac{du}{dx}$$

XIV. $y = \sec u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos u}{\sin^2 u}\frac{du}{dx} = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotang} u \frac{du}{dx}$$

XV. $y = \operatorname{cosec} u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos u}{\sin^2 u}\frac{du}{dx} = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotang} u \frac{du}{dx}$$

Die Formeln X—XIII liefern nach dem Satze über die Differentiation der inversen Funktionen folgende weiteren:

XVI. $y = \arcsin u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

XVII. $y = \arccos u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

XVIII. $y = \operatorname{arc\,tang} u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

XIX. $y = \operatorname{arc\,cotang} u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

§ 4. Beispiele zur Differentiation transzendenter Funktionen.

1) $y = l(1+x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}$$

2) $y = l\frac{x}{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$$

3) $y = l\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + l\frac{2}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

4) $y = l\frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2}$$

5) $y = l\,(x + \sqrt{1 + x^2})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

6) $y = l\,\frac{x^2 - 2}{\sqrt{(6 - 2x^2)^3}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{(x^2 - 2)(x^2 - 3)}$

7) $y = l\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

8) $y = l\sqrt{\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

9) $y = l\sqrt{\frac{\sqrt{3} - x\sqrt{7}}{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{21}}{7x^2 - 3}$

10) $y = l\,\frac{x^2 (2x + 4)^7}{(6 + 7x + 2x^2)(2x + 3)^7}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{x\,(6 + 7x + 2x)^2}$

11) $y = l\,\frac{\sqrt[21]{(x + 4)^{13}}\;\sqrt[28]{(x - 3)^{13}}}{\sqrt[12]{x + 1}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$

12) $y = l\left\{\frac{\sqrt[6]{(x^2 + 3x - 7)^{17}}}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}}\;\sqrt[6\sqrt{37}]{\left(\frac{2x + 3 + \sqrt{37}}{2x + 3 - \sqrt{37}}\right)^{29}}\right\}$

Man setze: $2x + 3 + \sqrt{37} = z$, $2x + 3 - \sqrt{37} = t$, $x - 1 = v$, alsdann wird:

$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - 10x + 7}$

13) $y = \frac{x^3 - \frac{8}{5}x^2 - \frac{32}{25}x + \frac{32}{25}}{(5x - 4)^2} + \frac{12}{125}\,l\,(4 - 5x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3}{(5x - 4)^3}$

14) $y = \frac{\frac{1}{x} + \frac{125}{12} + \frac{65}{3}x + \frac{35}{2}x^2 + 5x^3}{(1 + x)^4} + 5\,l\,\frac{x}{1 + x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 (1 + x)^5}$

15) $y = \frac{245\,x - 18}{294\,(3 - 7\,x^2)} + \frac{5}{6\sqrt{21}}\,l\left\{\frac{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}{\sqrt{3} - 7\,x^2}\right\} - \frac{1}{49}\,l\,(3 - 7\,x^2)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 2\,x^3}{(3 - 7\,x^2)^2}$

16) $y = \left\{\frac{1}{5\,x^2} - \frac{5}{12} + \frac{13x^2}{75} - \frac{7\,x^4}{250} + \frac{x^6}{625}\right\}\frac{1}{(x^2 - 5)^4} - \frac{1}{3125}\,l\,\frac{x^2}{x^2 - 5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3\,(x^2 - 5)^5}$

17) $y = [l\,x]^n$

$\frac{dy}{dx} = n\,[l\,x]^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

18) $y = a\,x^m\,l\,(b\,x^n)$

$\frac{dy}{dx} = a\,x^{m-1}\,[m\,l\,(b\,x^n) + n]$

19) $y = a\,x^m\,[l\,(b\,x^n)]^p$

$\frac{dy}{dx} = a\,x^{m-1}\,[l\,(b\,x^n)]^{p-1} \,.\, [m\,l\,(b\,x^n) + p\,n]$

20) $y = \frac{x^2\,(x^3 - 4)}{\sqrt[3]{(l\,2\,x)^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,(5\,x^3 - 8)\,.\,l\,2\,x - \frac{2}{3}\,x\,(x^3 - 4)}{\sqrt[3]{(l\,2\,x)^5}}$

21) $y = e^x \,.\, x^n$

$\frac{dy}{dy} = e^x\,x^{n-1}\,(x + n)$

22) $y = a^{2x^3 - 3x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 6\,x\,(x - 1)\,a^{2x^3 - 3x^2}\,l\,a$

23) $y = e^x\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

$\frac{dy}{dx} = x^3 \,.\, e^x$

24) $y = x^x$

$\frac{dy}{dx} = x^x\,(1 + l\,x)$

25) $y = (4\,x + 5\,x^3)^{3x^2 - 2x}$

$\frac{dy}{dx} = (4x + 5x^3)^{3x^2 - 2x}\left\{\frac{(3x - 2)(4 + 15x^2)}{4 + 5x^2} + (6x - 2)\,l\,(4x + 5x^3)\right\}$

26) $y = l\,[(3\,x - 7\,x^3)^{5x - 2}]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(5\,x - 2)\,(3 - 21\,x^2)}{3\,x - 7\,x^3} + 5\,l\,(3\,x - 7\,x^3)$

27) $y = l(lu)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\,l\,u} \cdot \frac{du}{dx}$$

28) $y = (4x - 3)\, l\left\{\frac{3}{x} + 4x + l\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}$

$$\frac{dy}{dx} = 4\,l\left\{\frac{3}{x} + 4x + l\left(\frac{4x-3}{x^2+2}\right)\right\} + \frac{16x^4 - 18x^2 + 9}{x(x+1)\left\{3 + 4x^2 + x\,l\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}}$$

29) $y = u^v$

$$\frac{dy}{dx} = u^v \,.\, l\,u \,.\, \frac{dv}{dx} + v \,.\, u^{v-1} \,.\, \frac{du}{dx}$$

30) $y = l(u^v)$

$$\frac{dy}{dx} = l\,u \,.\, \frac{dv}{dx} + \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

31) $y = (l\,u)^v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}(l\,u)^{v-1}\frac{du}{dx} + (l\,u)^v\, l\, lu \frac{dv}{dx}$$

32) $y = u^{(v^w)}$

$$\frac{dy}{dx} = u^{(v^w)} \,.\, v^w \,.\, lu\left[l\,v \,.\, \frac{dw}{dx} + \frac{w}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{u\,l\,u} \cdot \frac{du}{dx}\right]$$

33) $y = \sin^n x$

$$\frac{dy}{dx} = n \sin^{n-1} x \,.\, \cos x$$

34) $y = \sin m x$

$$\frac{dy}{dx} = m \,.\, \cos m x$$

35) $y = \sin(p x + q)$

$$\frac{dy}{dx} = p \,.\, \cos(p x + q)$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist:

$$\cos n x = \pm\left[1 - \frac{n^2}{1\,.\,2}\cos^2 x + \frac{n^2(n^2-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^4 x - \ldots\right]$$

Diese Gleichung auf beiden Seiten differentiiert und durch $(-n)$ dividiert, gibt:

$$\sin n x = \mp n \sin x\left[\cos x - \frac{n^2-4}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^3 x + \frac{(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x \ldots\right]$$

Ist n ungerade, so hat man:

$$\cos n x = \pm n \cos x\left[1 - \frac{n^2-1}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos^4 x - \ldots\right],$$

woraus sich durch dasselbe Verfahren, wie oben, ergibt:

$$\sin n x = \pm \sin x\left[1 - \frac{n^2-1}{1\,.\,2}\cos^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^4 x - \ldots\right]$$

Die oberen Zeichen sind zu nehmen, wenn n von der Form $4a$ oder $4a+1$, die unteren, wenn es von der Form $4a+2$ oder $4a+3$ ist.

Diese vier Formeln, welche in Kap. V abgeleitet werden, können in einigen der folgenden Beispiele zur Vereinfachung der durch die Differentiation unmittelbar erhaltenen Resultate dienen.

36) $y = \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 5\sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 7x + 3\cos 5x + \cos 3x - 5\cos x = -64\sin^2 x\cos^5 x$$

37) $y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{2}{3}\sin 6x + \sin 4x - 2\sin 2x - 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 8x + 4\cos 6x + 4\cos 4x - 4\cos 2x - 5$$
$$= -128\sin^2 x\cos^6 x$$

38) $y = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{3}{7}\cos 7x - \frac{8}{3}\cos 3x - 6\cos x + \frac{4}{3}\cos(-\frac{5}{3})$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 9x - 3\sin 7x + 8\sin 3x + 6\sin x = 256\sin^3 x\cos^6 x$$

39) $y = \frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 6x - 2\cos 4x - 7\cos 2x$

$$\frac{dy}{dx} = -(\sin 10x + 4\sin 8x + 3\sin 6x - 8\sin 4x - 14\sin 2x)$$
$$= 512\sin^3 x\cos^7 x$$

40) $y = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 . \cos x$$

41) $y = \operatorname{tang} x + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^4 x}$$

42) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$$

43) $y = \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x - 2x$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x)$$

44) $y = (\cos^2 x + \frac{2}{3})\sin^3 x$

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^2 x\cos^3 x$$

45) $y = \frac{1}{3}\cos x\operatorname{cotg} x - \frac{1}{6}\cos 2x\sin x - \frac{3}{2}\sin x - \frac{4}{3}\operatorname{cosec} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}$$

46) $y = \frac{15}{8}x + \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{8} - \frac{1}{\sin^2 x} + \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}$$

47) $y = \frac{3 \operatorname{cosec} x - 2 \sin x}{5 \cos^5 x} - \frac{16}{5} \operatorname{cotg} 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^6 x} = \frac{\sec^2 x \,.\, \operatorname{cosec}^2 x}{\cos^4 x}$

48) $y = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + l \operatorname{tang} x + l \sin \frac{3}{4}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$

49) $y = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + l \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^4 x \cos x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\sin^5 x}$

50) $y = \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + l \operatorname{tang} \frac{1}{2} x$

$\frac{dy}{dx} = \cos^3 x \operatorname{cotg} x$

51) $y = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + 3\, l \sin x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^7 x}{\sin^3 x}$

52) $y = \frac{1}{5} \sin^2 x \cos^3 x - \frac{13}{15} \cos^3 x - 3 \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x - \frac{7}{2}\, l \operatorname{tang} \frac{1}{2} x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^8 x}{\sin^3 x}$

53) $y = \frac{1}{4} \operatorname{tang}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 x - l \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}^5 x$

54) $y = -\frac{1}{4} \operatorname{cotg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 x + l \sin x$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}^5 x$

55) $y = \frac{1}{6} \operatorname{tang}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tang}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 x + l \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}^7 x$

56) $y = \frac{23 + 18 \cos 2x + 3 \cos 4x}{48 \cos^6 x} + l \operatorname{tang} x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \,.\, \operatorname{cosec} x}{\cos^6 x} = \frac{1}{\sin x \cos^7 x}$

57) $$y = \frac{(3 \cos 4x - 7) \operatorname{cotg} 2x}{(\sin 2x)^3} + 6 \,.\, l \operatorname{tang} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^5 x \,.\, \operatorname{cosec}^5 x$$

58) $$y = \frac{(-\frac{149}{6} + \frac{50}{3} \cos 4x - \frac{5}{2} \cos 8x) \operatorname{cotg} 2x}{(\sin 2x)^5} + 20\, l \operatorname{tang} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^7 x \,.\, \operatorname{cosec}^7 x$$

59) $$y = \sin(m + nx)$$

$$\frac{dy}{dx} = n \,.\, \cos(m + nx)$$

60) $$y = [\operatorname{tang}(p + qx)]^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2q \operatorname{tang}(p + qx)}{[\cos(p + qx)]^2}$$

61) $$y = x^2 \,.\, \sec(px + qx^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + x^2 (p + 3qx^2) \operatorname{tang}(px + qx^3)}{\cos(px + qx^3)}$$

62) $$y = \frac{\sin x}{a + b \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos x + b}{(a + b \cos x)^2}$$

63) $$y = \frac{\sin^2 x}{a + b \cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a + b) \sin 2x}{(a + b \cos^2 x)^2}$$

64) $$y = l \, \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \,.\, \sin x}{a + b \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}$$

65) $$y = e^{ax} (a \sin x - \cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (a^2 + 1) e^{ax} \,.\, \sin x$$

66) $$y = e^{ax} (a \cos x + \sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (a^2 + 1) e^{ax} \cos x$$

67) $$y = a e^{ax} \sin x (a \sin x - 2 \cos x) + 2 e^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = a (a^2 + 4) e^{ax} \sin^2 x$$

68) $$y = e^{ax} \cos^2 x (a \cos x + 3 \sin x) + \frac{6 e^{ax} (a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = (a^2 + 9) e^{ax} \cos^3 x$$

69) $$y = e^{3x} (3 \sin x - \cos x) + e^{-4} (5 \sin 2 - \cos 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 10 e^{3x} \,.\, \sin x$$

70) $$y = l\left\{\frac{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} + e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} - e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}\right\}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,e^{\sin x}(\cos^2 x + \sin x) - 4\,(\cos^2 x - e^{2\sin x})}{[\cos x\,(e^{2x} - e^{-2x}) - e^{\sin x}(e^{2x} + e^{-2x})]\sqrt{\cos^2 x - e^{2\sin x}}}$$

71) $$y = \arc\sin\sqrt{x^3}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}}$$

72) $$x = \arc\sin 2x\sqrt{1 - x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

73) $$y = \arc\sin\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1 + x)\sqrt{2x(1 - x)}}$$

74) $$y = \arc\sin\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1 + x^2}$$

75) $$y = x^3 \arc\sin\frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(3\arc\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

76) $$y = \arc\sin\frac{bx - a}{x\sqrt{b^2 + a}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{x^2 + 2bx - a}}$$

77) $$y = \arc\sin\sqrt{\frac{a + bx^2}{a + 1 + bx^2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{(a + 1 + bx^2)\sqrt{a + bx^2}}$$

78) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{2x}{1 - x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$$

79) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1 + x^2)}$$

80) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{2x + 1}{x\sqrt{3}}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{7x^2 + 4x + 1}$$

81) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

82) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{2x - 1}{2\sqrt{1 + x - x^2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x - x^2}}$$

83) $$y = \arc\operatorname{tang}\frac{x - 2}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$$

84) $$y = \arc\operatorname{tang}\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}$$

85) $$x = \arc\cos\sqrt{1 - x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

86) $y = \text{arc cos} \sqrt{1 - x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

87) $y = \text{arc cos} \frac{2\sqrt{x^2 + x - 1}}{x\sqrt{5}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$

88) $y = \sqrt{1 - x^2} - x \, . \, \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = - \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2}$

89) $y = (1 - \frac{1}{3} x^2) \, x \, . \, \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9} (7 - x^2) \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2) \, \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2}$

90) $y = \frac{1}{4} x^2 - [\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{4} \text{arc sin} \, x] \, . \, \text{arc sin} \, x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, . \, \text{arc sin} \, x$

91) $y = [- (\frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{8} x) \sqrt{1 - x^2} + \frac{3}{16} \text{arc sin} \, x] \, . \, \text{arc sin} \, x + \frac{1}{16} x^4 + \frac{3}{16} x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2}} \, . \, \text{arc sin} \, x$

92) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, . \, \text{arc sin} \, x + \frac{1}{2} \, l \, (1 - x^2) - \text{arc sin} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \, . \, \text{arc sin} \, x$

93) $y = \frac{1}{x} \, \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \, l \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)$

$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{x^2} \, . \, \text{arc sin} \sqrt{1 - x^2}$

94) $y = (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4}) \, \text{arc cos} \, x - \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = x \, . \, \text{arc cos} \, x$

95) $y = \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} - (1 - \frac{1}{2} x^2) \, \text{arc tang} \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = x \, \text{arc tang} \sqrt{1 - x^2}$

96) $y = \frac{1}{5} x^5 \, \text{arc tang} \, x - \frac{1}{20} x^4 + \frac{1}{10} x^2 - \frac{1}{10} \, l \, (1 + x^2)$

$\frac{dy}{dx} = x^4 \, \text{arc tang} \, x$

97) $y = [x - \frac{1}{2} \text{arc tang}\, x] \,.\, \text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\, l\,(1 + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + x^2} \text{arc tang}\, x$$

98) $y = \left\{ \frac{x}{2\,(1 + x^2)} + \frac{1}{4} \text{arc tang}\, x \right\} . \text{arc tang}\, x + \frac{1}{4\,(1 + x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 + x^2)^2} \,.\, \text{arc tang}\, x$$

99) $y = \left\{ \frac{2\,x}{1 - x^2} - \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{2\,x}{1 - x^2} \right\} . \text{arc tang} \frac{2\,x}{1 - x^2} - l\, \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

Man setze $2 \,\text{arc tang}\, x$ für $\text{arc tang} \frac{2\,x}{1 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16\, x^2}{(1 - x^4)\,(1 - x^2)} \,.\, \text{arc tang}\, x$$

100) $y = \text{arc tang tang}\; l\,(x + \sqrt{x^2 + a})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

101) $y = \left\{ \text{arc tang} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right\}^{\text{arc tang} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}}$

Es ist $\text{arc tang} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \frac{1}{2} \text{arc tang}\, x = u.$

Ferner ist, wenn $y = u^u$, $l\,y = u\, l\, u$,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{du}{dx}\,(1 + l\,u), \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = u^u\,(1 + l\,u)\,\frac{du}{dx} \,.$$

$$\frac{dy}{dx} = [\tfrac{1}{2} \text{arc tang}\, x]^{\frac{1}{2} \text{arc tang}\, x} \left\{ \frac{1 - l\,2 + l\, \text{arc tang}\, x}{2\,(1 + x^2)} \right\}$$

102) $y = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc cos} \frac{1 + 2 \cos x}{2 + \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(2 + \cos x)^2}$$

103) $y = \text{arc tang} \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x}$$

104) $$y=-\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{2p\sin x}{(m+n)+(m-n)\cos x}$$
$$+\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{2q\sin x}{(m-n)+(m+n)\cos x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a+b\cos x+c\cos 2x}$$

105) $$y=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{2q\sin x}{(m+n)+(m-n)\cos x}$$
$$-\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{2q\sin x}{(m-n)+(m+n)\cos x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{a+b\cos x+c\cos 2x}$$

In diesen beiden letzten Formeln ist $m^2=a+b+c$; $n^2=a-b+c$; $p^2=\frac{1}{4}(m-n)^2-2c$; $q^2=\frac{1}{4}(m+n)^2-2c$.

Kapitel II.

Differentialquotienten höherer Ordnungen von entwickelten Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 5. Allgemeine Sätze über independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnungen entwickelter Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.*)

Zur Abkürzung soll in der Folge das Produkt aller positiven ganzen Zahlen $1.2.3\ldots n$ nach Kramp mit $n!$ (n Fakultät) und der Binomialcoefficient $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ r}$ mit $\binom{n}{r}$ bezeichnet werden. Unter $\binom{n}{0}$ und $0!$ ist immer die Zahl 1 zu verstehen.

Bezeichnen u und v beliebige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, so gelten für die Bildung der Differentialquotienten höherer Ordnungen folgende Vorschriften:

I. $y = u + v$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{d^n v}{dx^n}$$

II. $y = Au$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\frac{d^n u}{dx^n},$$

wenn A eine von x unabhängige Grösse bezeichnet.

---

*) Vergleiche Hoppe: Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845.

III. $y = uv$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u\frac{d^n v}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} +$$

$$+ \binom{n}{k}\frac{d^k u}{dx^k}\frac{d^{n-k}v}{dx^{n-k}} + \ldots + \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{d^n u}{dx^n}v$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{d^k u}{dx^k}\frac{d^{n-k}v}{dx^{n-k}} = \text{symb.}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^n \quad \text{(Satz von Leibniz).}$$

Eine allgemeinere Form desselben ist:

$$y = uvw\ldots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \text{symb.}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots\right)^n$$

Wie die symbolische Entwicklung von $\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze zu verstehen sei, erhellt aus der vorhergehenden ausführlichen Formel. Es möge noch hervorgehoben werden, dass $\frac{d^0 u}{dx^0}$ und $\frac{d^0 v}{dx^0}$ die Funktionen u und v selbst bedeuten.

Bezeichnet $F(u)$ eine mittelbare Funktion von x, so gilt in dem speziellen Falle, wo u eine lineare Funktion von x ist, für jeden positiven, ganzzahligen Wert von n der Satz $\frac{d^n F(u)}{dx^n} = F^{(n)}(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^n$. (Vgl. Formel VI, § 1 für $n = 1$.) Ist dagegen u irgend eine andere Funktion von x, so werden im allgemeinen die Differentialquotienten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\ldots$ wieder Funktionen von x sein, und man hat der Reihe nach, wenn man von der Lagrange'schen Bezeichnung $F'(u)$, $F''(u), \ldots F^{(n)}(u)$ für die erste, zweite, ... $n$te in Bezug auf u genommene Ableitung der Funktion $F(u)$ Gebrauch macht:

$$y = F(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(u)}{dx} = F'(u)\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2F(u)}{dx^2} = F'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + F''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3F(u)}{dx^3} = F'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3F''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + F'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3,$$

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = \frac{d^4 F(u)}{d x^4} = F'(u) \frac{d^4 u}{d x^4} + F''(u) \left[3 \left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right)^2 + 4 \frac{d u}{d x} \frac{d^3 u}{d x^3} \right]$$
$$+ F'''(u) \,.\, 6 \left(\frac{d u}{d x}\right)^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + F^{IV}(u) \left(\frac{d u}{d x}\right)^4$$

. . . .

und im allgemeinen

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{d^n F(u)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k \, F^{(k)}(u)$$

In dieser Formel bedeutet A_k eine von der Natur der Funktion F völlig unabhängige Funktion gewisser in Bezug auf die unabhängige Variable x genommener Differentialquotienten von u. Kann demnach A_k für eine spezielle Funktion F bestimmt werden, so behält das Resultat seine Gültigkeit für jede beliebige Funktion F.

Setzt man z. B. $y = F(u) = u^h$, so wird

$$F^{(k)}(u) = \frac{d^k (u^h)}{d u^k} = h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)\,u^{h-k} = k!\,.\binom{h}{k}\,u^{h-k}.$$

Dann wird die obige Gleichung

$$\frac{d^n (u^h)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} k!\binom{h}{k}\,u^{h-k}\,.\,A_k.$$

Dividiert man beide Seiten durch u^h und beachtet, dass $\binom{h}{k}$ für $k > h$ verschwindet, so ist

$$u^{-h}\,\frac{d^n (u^h)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=h} k!\binom{h}{k}\,u^{-k}\,.\,A_k.$$

Setzt man für den Augenblick der Kürze wegen

$$u^{-h}\,\frac{d^n (u^h)}{d x^n} = w_h,$$
$$k!\,u^{-k}\,A_k = v_k,$$

so gibt die Gleichung

$$w_h = \sum_{k=1}^{k=h} \binom{h}{k}\,v_k\,.$$

Wenn man in dieser Gleichung der Reihe nach $h = 1, 2, 3 \ldots k$ einsetzt, so folgt:

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = 2\,v_1 + v_2$$
$$w_3 = 3\,v_1 + 3\,v_2 + v_3$$
$$w_4 = 4\,v_1 + 6\,v_2 + 4\,v_3 + v_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_k = \binom{k}{1} v_1 + \binom{k}{2} v_2 + \binom{k}{3} v_3 + \ldots v_k.$$

Rückwärts erhält man hieraus leicht:

$$v_1 = w_1$$
$$v_2 = -\,2\,w_1 + w_2$$
$$v_3 = 3\,w_1 - 3\,w_2 + w_3$$
$$v_4 = -\,4\,w_1 + 6\,w_2 - 4\,w_3 + w_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_k = (-1)^{k+1} \binom{k}{1} w_1 + (-1)^k \binom{k}{2} w_2 + \ldots + w_k$$
$$= \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \,.\, \binom{k}{h} \,.\, w_h.$$

Setzt man für v und w ihre Werte wieder ein, so findet sich

$$A_k = \frac{u^k}{k!} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} u^{-h} \frac{d^n\,(u^h)}{d\,x^n},$$

und daher wird

$$\text{IV*.} \quad \frac{d^n\,F(u)}{d\,x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} F^{(k)}(u) \frac{u^k}{k!} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} u^{-h} \frac{d^n\,(u^h)}{d\,x^n}.$$

Beachtet man, dass

$$\left(\frac{u}{\gamma} - 1\right)^k = (-1)^k \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)^k = (-1)^k \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h \binom{k}{h} \gamma^{-h} u^h,$$

und differentiiert man diese Gleichung $n$mal nach einander, indem man γ als Konstante betrachtet, so folgt

$$\frac{d^n \left(\frac{u}{\gamma} - 1\right)^k}{d\,x^n} = (-1)^k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h \binom{k}{h} \gamma^{-h} \frac{d^n\,(u^h)}{d\,x^n},$$

oder wenn nach der Differentiation $\gamma = u$ gesetzt wird:

$$\left[\frac{d^n \left(\frac{u}{\gamma} - 1\right)^k}{d\,x^n}\right]_{\gamma=u} = (-1)^k \sum_{h-1}^{h=k} (-1)^h \binom{k}{h} u^{-h} \frac{d^n\,(u^h)}{d\,x^n}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung erhält die Formel IV* folgende, in manchen Fällen brauchbarere Gestalt:

$$\text{IV.}\quad \frac{d^n F(u)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u^k}{k!} F^{(k)}(u) \left[\frac{d^n \left(\frac{u}{\gamma} - 1\right)^k}{d x^n} \right]_{\gamma=u}$$

Die beigefügte Marke $\{\gamma = u\}$ soll andeuten, dass die Grösse γ während der Differentiation in Bezug auf x als konstant zu behandeln und nach Ausführung derselben durch u zu ersetzen ist.

Macht man in dieser Gleichung $u = x^2$, so erhält man einen Ausdruck für $\frac{d^n F(x^2)}{d x^n}$, dessen Umformung jedoch einige Weitläufigkeiten verursacht. Es wird daher zur Herstellung der n ten Ableitung von $F(x^2)$ der Weg der Induktion vorzuziehen sein.

Setzt man

$$y = F(x^2),$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = 2x F'(x^2),$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = (2x)^2 F''(x^2) + 2 F'(x^2),$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = (2x)^3 F'''(x^2) + 6(2x) F''(x^2),$$

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = (2x)^4 F^{IV}(x^2) + 12(2x)^2 F'''(x^2) + 12 F''(x^2),$$

$$\frac{d^5 y}{d x^5} = (2x)^5 F^{V}(x^2) + 20(2x)^3 F^{IV}(x^2) + 60(2x) F'''(x^2),$$

. . . .

$$\text{IVa.}\quad y = F(x^2)$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} (2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p} (2x)^{n-2p} F^{(n-p)}(x^2) + \ldots$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann durch den Schluss von n auf $(n+1)$ erwiesen werden.

Auf analoge Weise wird gefunden:

IVb. $y = F(\sqrt{x})$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1}\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}} - \dots$$

$$+ (-1)^p . \frac{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots(n-p)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\dots\;p}\frac{F^{(n-p)}(\sqrt{x})}{2(\sqrt{x})^{n+p}}\dots$$

IVc. $y = F\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \left[\frac{1}{x^{2n}} F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)\binom{n}{1}}{x^{2n-1}} F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)(n-2)\binom{n}{2}}{x^{2n-2}} F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)\binom{n}{p}}{x^{2n-p}} F^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) + \dots\right]$$

Setzt man in der Gleichung IV* $u = x^\lambda$, so ergibt sich

$$y = F(x^\lambda)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{\lambda k}}{k!} F^{(k)}(x^\lambda) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h}\binom{k}{h} x^{-\lambda h}\frac{d^n(x^{\lambda h})}{dx^n} =$$

$$= \frac{n!}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^{\lambda k}}{k!} F^{(k)}(x^\lambda)\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}\binom{k}{h}\binom{\lambda h}{n}.$$

Demnach hat man den Satz

IVd. $y = F(x^\lambda)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n} A_k\, x^{\lambda k} F^{(k)}(x^\lambda),$$

wo $A_k = \frac{n!}{k!} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} \binom{\lambda h}{n} =$

$$= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} \left[\binom{k}{1}\binom{\lambda}{n} - \binom{k}{2}\binom{2\lambda}{n} + \binom{k}{3}\binom{3\lambda}{n} \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}\binom{k\lambda}{n} \right]$$

(Man vergleiche die drei vorangehenden mit der hier aufgestellten Formel).

Macht man in der Formel IV* $u = e^x$, so kommt

$$\frac{d^n F(e^x)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{kx}}{k!} F^{(k)}(e^x) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} e^{-hx} \frac{d^n (e^{hx})}{d x^n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{kx}}{k!} F^{(k)}(e^x) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} h^n .$$

Folglich ist

IV e. $$\frac{d^n F(e^x)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{kx} F^{(k)}(e^x) ,$$

wo $A_k = \frac{1}{k!} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} \binom{k}{h} h^n =$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left[\binom{k}{1} 1^n - \binom{k}{2} 2^n + \binom{k}{3} 3^n - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} k^n \right]$$

§ 6. Beispiele.

1) $y = x^\mu$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \mu (\mu - 1) \mu - 2) \dots (\mu - n + 1) . x^{\mu - n}$$

2) $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^n . \frac{1 . 2 . 3 \dots n}{x^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

3) $y = \frac{1}{x^\mu}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^n . \frac{\mu (\mu + 1) (\mu + 2) \dots (\mu + n - 1)}{x^{\mu + n}}$$

4) $y = \sqrt{x}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} \frac{1 . 3 . 5 \ldots (2n - 3 (2n - 1) . \sqrt{x}}{(2n - 1)\, 2^n . x^n}$$

(Der Faktor $(2n - 1)$ ist im Zähler und Nenner hinzugefügt, damit die Formel auch für den ersten Differentialquotienten, für $n = 1$, ihre Anwendung finde.)

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^n . \frac{1 . 3 . 5 \ldots (2n - 1)}{2^n . x^n \sqrt{x}}$$

6) $y = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} . \frac{2 . 5 . 8 . 11 \ldots (3n - 7)(3n - 4)(3n - 1) . \sqrt[3]{x}}{(3n - 1) . 3^n . x^n}$$

(Wegen des Faktors $(3n - 1)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

7) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^n . \frac{1 . 4 . 7 . 10 \ldots (3n - 8)(3n - 5)(3n - 2)}{3^n x^n \sqrt{x}}$$

8) $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1}\, 2 . \frac{1 . 4 . 7 . 10 \ldots (3n - 5)(3n - 2) \sqrt[3]{x^2}}{(3n - 2) . 3^n x^n}$$

(Wegen des Faktors $(3n - 2)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

9) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^n . \frac{2 . 5 . 8 . 11 \ldots (3n - 1)}{3^n x^n \sqrt[3]{x^2}}$$

10) $y = (\alpha + \beta x)^\mu$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \mu (\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - n + 1)\, \beta^n (\alpha + \beta x)^{\mu - n}$$

11) $y = (\alpha + \beta x^2)^\mu$

Nach dem vorhergehenden Beispiel findet sich mit Hülfe von IVa, § 5, wenn man noch zur Abkürzung das Binom $\alpha + \beta x^2$ mit u und seine erste Ableitung $2 \beta x$ mit u' bezeichnet

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)u^{\mu-n}.u'^n\Big[1+\frac{n(n-1)}{1.(\mu-n+1)}\Big(\frac{\beta u}{u'^2}\Big)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\Big(\frac{\beta\mu}{u'^2}\Big)^2+\ldots\Big]$$

12) $y=(a+2bx+cx^2)^\mu$

Die gesuchte $n$te Ableitung geht aus 11) hervor, wenn man darin α, β, x ersetzt durch $\frac{ac-b^2}{c}$, c, $\frac{b}{c}+x$. Macht man dann noch $a+2bx+cx^2=u$, $2(b+cx)=u'$, so erhält die Lösung die nämliche Form, wie in Beispiel 11). Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772).

Anmerkung. Die Substitutionen $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $x=\cos z$, $n=\nu-1$, $\mu=\nu-\frac{1}{2}$ ergeben unter Anwendung der allgemeinen Formel

$$\binom{\nu}{1}\operatorname{tang} z-\binom{\nu}{2}\operatorname{tang}^3 z+\binom{\nu}{5}\operatorname{tang}^5 z-\ldots=\frac{\sin\nu z}{\cos^\nu z}$$

welche durch Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{\sin\nu z}{\cos^\nu z}=\frac{e^{\nu z i}-e^{-\nu z i}}{2i\cos^\nu z}=\frac{(\cos z+i\sin z)^\nu-(\cos z-i\sin z)^\nu}{2i\cos^\nu z}$$

entsteht, den bemerkenswerten Spezialfall

$$\frac{d^{\nu-1}\left[(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right]}{dx^{\nu-1}}=(-1)^{\nu-1}.1.3.5\ldots2\nu-1)\frac{\sin\nu z}{\nu}$$

(Jacobi, Crelle's Journal XV, S. 3 und O. Rodrigues: Thèse sur l'attraction des sphéroïdes, 1815.)

13) $y=\frac{1}{\alpha+\beta x}$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-\beta)^n\frac{n!}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}$$

14) $y=\frac{1}{\alpha+\beta x^2}$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n n!\frac{u'^n}{u^{n+1}}\Big[1-\binom{n-1}{1}\Big(\frac{\beta u}{u'^2}\Big)+\binom{n-2}{2}\Big(\frac{\beta u}{u'^2}\Big)^2-\ldots\Big]$$

wo $u=\alpha+\beta x^2$, $u'=2\beta x$.

(Vergleiche Beispiel 11) für $\mu=-1$).

15) $$y = \frac{1}{a + 2bx + cx^2}$$

Durch das gelegentlich des Beispiels 12) angewandte Verfahren erhält man dieselbe Formel, wie im Beispiel 14).

16) $$y = \frac{x}{a + bx}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-b)^{n-1} \frac{a\, n!}{(a + bx)^{n+1}}$$

17) $$y = \frac{(a + bx)^m}{(a' + b'x)^p}$$

Nach dem Leibniz'schen Satze erhält man, wenn der Kürze wegen gesetzt wird

$$A = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\, b^n \frac{(a + bx)^{m-n}}{(a' + b'x)^p}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\left[1 - \binom{n}{1} \frac{p}{(m-n+1)} \left(\frac{b'}{b}\right)\left(\frac{a + bx}{a' + b'x}\right) + \right.$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{p(p+1)}{(m-n+2)(m-n+1)} \left(\frac{b'}{b}\right)^2 \left(\frac{a + bx}{a' + b'x}\right)^2 + \ldots$$

$$\left. + (-1)^k \binom{n}{k} \frac{p(p+1)\ldots(p-k+1)}{(m-n+k)(m-n+k-1)\ldots(m-n+1)} \left(\frac{b'}{b}\right)^k \left(\frac{a + bx}{b' + b'x}\right)^k \pm \ldots\right]$$

18) $$y = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2}$$

Es ist $y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a - bx} + \frac{1}{a + bx}\right)$,

folglich

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!\, b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a - bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a + bx)^{n+1}}\right]$$

Für ein gerades u hat man demnach

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!\, b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}} \binom{n+1}{2h} a^{n-2h}\, b^{2h}\, x^{2h}$$

und für ein ungerades n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!\, b^{n+1}}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n-1}{2}} \binom{n+1}{2h+1} a^{n-2h-1}\, b^{2h}\, x^{2h+1}$$

Ordnet man nach fallenden Potenzen von x, so wird sowohl für ein gerades, als auch für ein ungerades n

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{n!\, b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h \overline{<} \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2h+1} a^{2h}\, b^{n-2h}\, x^{n-2h}$$

(Unter dem Zeichen $h \overline{<} \frac{n}{2}$ ist hier stets die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl zu verstehen.)

19) $\quad y = \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}$

Substituiert man in der Lösung der Aufgabe 18) $b\,i$ für b, so wird für ein gerades n

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!\, b^n}{(a^2 + b^2 x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}} (-1)^h \binom{n+1}{2h} a^{n-2h}\, b^{2h}\, x^{2h}$$

und für ein ungerades n

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!\, b^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^h \binom{n+1}{2h+1} a^{n-2h-1}\, b^{2h}\, x^{2h+1}.$$

Eine andere Form der Lösung dieser Aufgabe wird erhalten, wenn man schreibt

$$y = \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a - i b x} + \frac{1}{a + i b x}\right).$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^n y}{d x^n} = i^n \frac{n!\, b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a - i b x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a + i b x)^{n+1}}\right]$$

Setzt man nun $a = r \cos \varphi$, $b x = r \sin \varphi$, so kommt für ein gerades n

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!\, b^n}{a\,(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cos\left[(n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b x}{a}\right]$$

und für ein ungerades n

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!\, b^n}{a\,(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{b x}{a}\right]$$

Mittelst der Zerlegung

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{bx-ai}-\frac{1}{bx+ai}\right)$$

erhält man durch eine analoge Rechnung eine Formel, die sowohl für ein gerades, als auch für ein ungerades n Gültigkeit besitzt.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\frac{n!\,b^n}{a\,(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{bx}\right]$$

20) $$y=\frac{1}{x^m-a^m}$$

Man muss hier die Zerlegung in Partialbrüche, die bei der Integralrechnung ausführlicher besprochen wird, vorweg nehmen. Ist

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\nu)$$

eine ganze rationale Funktion von x, und sind deren Nullstellen, $\alpha, \beta\ldots\nu$ sämtlich von einander verschieden, so gilt die Gleichung

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\cdots+\frac{N}{(x-\nu)},$$

wobei

$$A=\left[\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}\right]_{x=\alpha},\ B=\left[\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}\right]_{x=\beta}\ldots N=\left[\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}\right]_{x=\nu}$$

In dem vorliegenden Falle sind diese Nullstellen, die Wurzeln der binomischen Gleichung $x^m=a^m$, ohne Weiteres bekannt.

A. wenn m gerade ist

$$\frac{1}{x^m-a^m}=\frac{1}{m\,a^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)+$$

$$+\frac{1}{m\,a^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}+i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}-i\,a\sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+\frac{1}{m\,a^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\frac{2h\pi}{m}-i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\cos\frac{2h\pi}{m}+i\,a\sin\frac{2h\pi}{m}},$$

also mit Hülfe von 13), wenn man noch setzt:

$$\cos\varphi_h = \frac{x - a\cos\frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2}},$$

$$\sin\varphi_h = \frac{a\sin\frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2}},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{m\,a^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{n!}{\frac{1}{2}m\,a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1} \frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{n+1}}}.$$

B. wenn m ungerade ist

$$\frac{1}{x^m - a^m} = \frac{1}{m\,a^{m-1}} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{1}{m\,a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} + i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} - i\,a\sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+ \frac{1}{m\,a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\frac{2h\pi}{m} - i\sin\frac{2h\pi}{m}}{x - a\cos\frac{2h\pi}{m} + i\,a\sin\frac{2h\pi}{m}},$$

also unter ähnlicher Annahme wie vorhin:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{m\,a^{m-1}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{n!}{\frac{1}{2}m\,a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{n+1}}}.$$

21) $$y = \frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-b)^n \,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\,(a+bx)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

22) $$y=\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Aus Beispiel 11) für $\mu=-\frac{1}{2}$, $\alpha=a$, $\beta=b$ erhält man

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{u'^n}{u^{\frac{2n+1}{2}}}\left[1-\frac{2^1.n(n-1)}{1.(2n-1)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^2.n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)^2-\ldots\right]$$

23) $$y=\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{u'^n}{u^{\frac{2n+1}{2}}}\left[1+\frac{2^1.n(n-1)}{1.(2n-1)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^2.n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{bu}{u'^2}\right)^2+\ldots\right],$$

wo $u=a-bx^2$, $u'=-2bx$

24) $$y=\sqrt{(a+bx)^\mu}$$

Bezeichnet p die grösste in $\frac{\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl und ist $n\overline{\overline{<}}p+1$, so ergibt sich der $n$te Differentialquotient unmittelbar aus 10); ist dagegen $n>p+1$, so wird

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2p).1.3.5\ldots(2n-2p-3)\times$$
$$\times\left(\frac{b}{2}\right)^n.\left(\frac{-1}{a+bx}\right)^{n-p-1}\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

25) $$y=e^x$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^x$$

26) $$y=e^{a+bx}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=b^n e^{a+bx}$$

27) $$y=e^{a^2+b^2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=2b.e^{a^2+b^2x^2}.bx$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 2 b^2 . e^{a^2+b^2x^2} . [2 b^2 x^2 + 1]$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = 4 b^3 . e^{a^2+b^2x^2} . [2 b^3 x^3 + 3 b x]$$

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = 4 b^4 . e^{a^2+b^2x^2} . [4 b^4 x^4 + 12 b^2 x^2 + 3]$$

$$\frac{d^5 y}{d x^5} = 8 b^5 . e^{a^2+b^2x^2} . [4 b^5 x^5 + 20 b^3 x^3 + 15 b x]$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{d x^n} = e^{a^2+b^2x^2} . \sum_{p=0}^{p \gtreqless \frac{n}{2}} 2^{n-p} . 1 . 3 . 5 \ldots (2 p - 1) . \binom{n}{2p} b^{n^2-2p} x^{n-2p}$$

28) $y = a^x$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = a^x (l a)^n$$

29) $y = e^x . x^m$

$$\frac{d y}{d x} = e^x . [x^m + m x^{m-1}]$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = e^x . [x^m + 2 m x^{m-1} + m (m - 1) x^{m-2}]$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = e^x . [x^m + 3 m x^{m-1} + 3 m (m-1) x^{m-2} + m (m-1)(m-2) x^{m-3}]$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{d x^m} = e^x . \sum_{p=0}^{p=n} p! \binom{n}{p} . \binom{m}{p} . x^{m-p}$$

30) $y = l x$

Da $\frac{d y}{d x} = \frac{1}{x}$ ist, so wird nach Beispiel 2)

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} . \frac{(n-1)!}{x^n} .$$

31) $y = l (a + b x)$

Mit Hülfe von Aufgabe 13) wird

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \, b^n}{(a + b x)^n}$$

32) $y = l(a^2 - b^2 x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 b^2 x}{a^2 - b^2 x^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2 b^2 (b^2 x^2 + a^2)}{(a^2 - b^2 x^2)^2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{4 b^3 (b^3 x^3 + 3 a^2 b x)}{(a^2 - b^2 x^2)^3}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{12 b^4 (b^4 x^4 + 6 a^2 b^2 x^2 + a^4)}{(a^2 - b^2 x^2)^4}$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = -\frac{48 b^5 (b^5 x^5 + 10 a^2 b^3 x^3 + 5 a^4 b x)}{(a^2 - b^2 x^2)^5}$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\frac{2(n-1)!\, b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} \sum_{p=0}^{p \gtreqless \frac{1}{2} n} \binom{n}{2p} a^{2p} (bx)^{n-2p}$$

33) $y = l(a^2 + b^2 x^2)$

$$\frac{d^n y}{dy^n} = \frac{2 \,.\, (n-1)!\, b^n}{(a^2 + b^2 x^2)^n} \sum_{p=0}^{p \gtreqless \frac{1}{2} n} (-1)^{n-p+1} \binom{n}{2p} a^{2p} (bx)^{n-2p}$$

34) $y = l \dfrac{a + bx}{a - bx}$

Da $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2 x^2}$ ist, so wird nach Beispiel 18)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{2(n-1)\, a\, b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} \sum_{p=0}^{p \gtreqless \frac{1}{2}(n-1)} \binom{n}{2p+1} a^{2p} (bx)^{n-2p-1}.$$

35) $y = (a + bx)^m \, l(a + bx)$

Der Leibniz'sche Satz liefert

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, b^n (a+bx)^{m-n} \Bigg[l(a+bx) + \\ + \frac{\binom{n}{1}}{(m-n+1)} - \frac{\binom{n}{2} . 1}{(m-n+1)(m-n+2)} + \\ + \frac{\binom{n}{3} . 1 . 2}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)} - \ldots \Bigg]$$

36) $y = l(b + x + \sqrt{a + 2bx + x^2})$

Da $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a + 2bx + x^2}}$,

so kann der gesuchte $n$te Differentialquotient als Spezialfall des Beispiels 12) erhalten werden, indem in 12) $\mu = -\frac{1}{2}$ und $(n-1)$ an Stelle von n gesetzt wird.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5...(2n-3)}{2^{n-1}} \cdot \frac{u'^{n-1}}{u^{\frac{2n-1}{2}}} \left[1 - \frac{2^1.(n-1)(n-2)}{1.(2n-3)} \left(\frac{u}{u'^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{u}{u'^2}\right)^2 - \ldots \right]$$

37) $y = \sin px$

$$\frac{dy}{dx} = p \cos px = p \sin\left(px + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -p^2 \sin px = p^2 \sin\left(px + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p^n \sin\left(px + n\frac{\pi}{2}\right)$$

38) $y = \cos px$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p^n \cos\left(px + n\frac{\pi}{2}\right)$$

39) $y = e^{x \sin \alpha} \sin(x \cos \alpha)$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x \sin \alpha} \sin\left(x \cos \alpha - n\alpha + n\frac{\pi}{2}\right)$$

40) $y = e^{ax} \sin mx$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax} a \left(\sin mx + \frac{m}{a} \cos mx\right)$$

Setzt man $\frac{m}{a} = \operatorname{tang} \varphi$, also $a = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(mx + \varphi)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi)$$

41) $y = (a - bx)^m \sin(a + bx)$

Der Leibniz'sche Satz liefert

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n m(m-1)\ldots(m-n+1)\, b^n (a-bx)^{m-n} \Big[\sin(a+bx) -$$

$$-\binom{n}{1}\frac{a-bx}{m-n+1}\sin\left(a+bx+\frac{\pi}{3}\right)+$$

$$+\binom{n}{2}\frac{(a-bx)^2}{(m-n+1)(m-n+2)}\sin\left(a+bx+2\frac{\pi}{2}\right)-\ldots\Big]$$

42) $y = x^m e^{ax} \sin mx$

Setzt man $e^{ax}\sin mx = u$, $x^m = v$, so ist zunächst nach Beispiel 40)

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi),$$

und nun ergibt der Leibniz'sche Satz leicht

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \Big[x^m \sin(mx+n\varphi) +$$

$$+\binom{n}{1} m x^{m-1} \frac{\sin[mx+(n-1)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+\binom{n}{2} m(m-1) x^{m-2} \frac{\sin[mx+(n-2)\varphi]}{(a^2+m^2)^{\frac{2}{2}}} + \ldots\Big]$$

43) α) $y = \sin^{2m} px$

β) $y = \sin^{2m+1} px$

γ) $y = \cos^{2m} px$

δ) $y = \cos^{2m+1} px$, wo m eine positive ganze Zahl bezeichne.

Mit Hülfe des Euler'schen Satzes

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

erhält man die bekannten Formeln

α) $$2^{2m-1}\sin^{2m} x = (-1)^m \left\{\sum_{h=0}^{h=m-1} (-1)^h \binom{2m}{h} \cos(2m-2h)x + \tfrac{1}{2}\binom{2m}{m}\right\}$$

β) $$2^{2m}\sin^{2m+1} x = (-1)^m \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h \binom{2m+1}{h} \sin(2m+1-2h)x$$

$$\gamma)\quad 2^{2m-1}\cos^{2m} x = \sum_{h=0}^{h=m-1} \binom{2m}{h} \cos(2m-2h)x + \tfrac{1}{2}\binom{2m}{m}$$

$$\delta)\quad 2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{h=0}^{h=m} \binom{2m+1}{h} \cos(2m+1-2h)x$$

Darnach wird:

$\alpha)\quad y = \sin^{2m} p x$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} p^n \sum_{h=0}^{h=m-1} (-1)^h \binom{2m}{h} (2m-2h)^n \cos\left[(2m-2h)px + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$\beta)\quad y = \sin^{2m+1} p x$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} p^n \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h \binom{2m+1}{h} (2m+1-2h)^n \times$$

$$\times \sin\left[(2m+1-h)px + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$\gamma)\quad y = \cos^{2m} p x$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p^n}{2^{2m-1}} \sum_{h=0}^{h=m-1} \binom{2m}{h} (2m-2h)^n \cos\left[(2m-2h)px + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$\delta)\quad y = \cos^{2m+1} p x$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p^n}{2^{2m}} \sum_{h=0}^{h=m} \binom{2m+1}{h} (2m+1-2h)^n \cos\left[2m+1-2h)px + \frac{n\pi}{2}\right]$$

44) $\quad y = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{x}{a}$

Setzt man $\operatorname{arc\,tang} \dfrac{x}{a} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, also $x = a \operatorname{cotang} \varphi$,

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a}{\sin^2\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin^2\varphi}{a},$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2} = \frac{\sin^2\varphi}{a}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{a}\frac{\sin^2\varphi}{a} = -\frac{\sin^2\varphi\sin 2\varphi}{a^2}$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \sin^n \varphi \sin n \varphi}{a^n}$$

(Euler: Inst. Calc. diff.)

45) $y = \operatorname{arc} \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Setzt man in Beispiel 23) $a=1$, $b=1$, wodurch $u=1-x^2$, $u' = -2x$ wird, und schreibt $(n-1)$ für n, so erhält man

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}} \cdot \frac{u'^{n-1}}{u^{\frac{2n-1}{2}}} \left[1 + \frac{2^1.(n-1)(n-2)}{1.(2n-3)} \left(\frac{u}{u'^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{u}{u'^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

46) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \dfrac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{\sin \alpha}{(1-px)(1-qx)},$$

wo $\cos \alpha + i \sin \alpha = p$, $\cos \alpha - i \sin \alpha = q$.

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2i} \left(\frac{p}{1-px} - \frac{q}{1-qx}\right)$$

und daher

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{(n-1)!}{2i} \frac{p^n (1-qx)^n - q^n (1-px)^n}{(1-2x\cos\alpha + x^2)^n}$$

Wenn man noch setzt

$$1 - x \cos \alpha = \varrho \cos \varphi, \quad x \sin \alpha = \varrho \sin \varphi,$$

so wird

$$p^n (1-qx)^n - q^n (1-px)^n = 2 i \varrho^n \sin n (\alpha + \varphi);$$

folglich

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (n-1)! \frac{\sin n (\alpha + \varphi)}{(1 - 2x \cos \alpha + x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

§ 7. Beispiele zur numerischen Berechnung der sukzessiven Differentialquotienten einiger Funktionen für den speziellen Wert $x = 0$ mittelst Rekursion.

1) $f(x) = (a + b x^2)^\mu$

$f'(x) = 2 \mu b x (a + b x^2)^{\mu - 1}$

Multipliziert man beide Seiten der zweiten Gleichung mit $(a + b x^2)$ und gibt dem Resultate die Form

$$(a + b x^2) f'(x) = 2 \mu b x f(x),$$

differentiiert hierauf beiderseits $(n+1)$ mal, so erhält man nach dem Leibniz'schen Satze

$$(a + b x^2) f^{(n+2)}(x) + 2 b \binom{n+1}{1} x f^{(n+1)}(x) + 2 b \binom{n+1}{2} f^{(n)}(x) =$$
$$= 2 \mu b x f^{(n+1)}(x) + 2 \mu b \binom{n+1}{1} f^{(n)}(x)$$

oder $f^{(n+2)}(x) = b \dfrac{(2\mu - 2n - 2) x f^{(n+1)}(x) + (n+1)(2\mu - n) f^{(n)}(x)}{a + b x^2}$.

Setzt man in diese Gleichung den speziellen Wert $x = 0$ ein, so kommt

$$f^{(n+2)}(0) = b \frac{(n+1)(2\mu - n)}{a} f^{(n)}(0).$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so wird

$$f^{(n)}(0) = 1.3.5 \ldots (n-1) \mu (\mu - 1)(\mu - 2) \ldots [\mu - (\tfrac{1}{2} n - 1)] a^{\mu - \frac{1}{2} n} (2 b)^{\frac{n}{2}};$$

ist dagegen n eine ungerade Zahl, so folgt, da $f'(0) = 0$,

$$f^{(n)}(0) = 0$$

2) $f(x) = e^{\sin x}$

$f'(x) = e^{\sin x} \cos x = f(x) \cos x$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) \cos x - \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \sin x - \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cos x +$$
$$+ \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \sin x + \ldots$$

$$f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) - \binom{n}{2} f^{(n-2)}(0) + \binom{n}{4} f^{(n-4)}(0) - \binom{n}{6} f^{(n-6)}(0) + \ldots$$

Hieraus ergibt sich

$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = -3$,
$f^{V}(0) = -8$, $f^{VI}(0) = -3$, $f^{VII}(0) = 56$, $f^{VIII}(0) = 217$,
$f^{IX}(0) = 64$, $f^{X}(0) = -2951$, $f^{XI}(0) = -12672 = -2^7.3^2.11$ etc.

3) $f(x) = \text{arc tang}\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$(1 + x^2) f''(x) + 2x f'(x) = 0$$

$$(1 + x^2) f^{(n+1)}(x) + 2\binom{n-1}{1} x f^{(n)}(x) + 2\binom{n-1}{2} f^{(n-1)}(x) + \\ + 2x f^{(n)}(x) + 2\binom{n-1}{1} f^{(n-1)}(x) = 0$$

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n-1)}(0) = 0$$

Wenn nun n eine gerade Zahl ist, so folgt, weil $f'(0) = 1$

$$f^{(n+1)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} 1 . 2 . 3 \ldots n;$$

ist dagegen n eine ungerade Zahl, so wird wegen $f''(0) = 0$

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

4) $f(x) = \text{arc sin}\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2}\, f'(x) = 1$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} f'(x) + \sqrt{1 - x^2}\, f''(x) = 0$$

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$$

$$(1 - x^2) f^{(n+1)}(x) - 2\binom{n-1}{1} x f^{(n)}(x) - 2\binom{n-1}{2} f^{(n-1)}(x) - \\ - x f^{(n)}(x) - \binom{n-1}{1} f^{(n-1)}(x) = 0$$

$$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0$$

Für ein gerades n wird, da $f'(0) = 1$

$$f^{(n+1)}(0) = 1 . 3^2 . 5^2 \ldots (n-1)^2$$

und für ein ungerades n

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

5) $f(x) = (\text{arc sin}\, x)^2$

Analog wie in 4) erhält man die Gleichung

$$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0$$

und hieraus für ein gerades n

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

und für ein ungerades n

$$f^{(n+1)}(0) = 2 \,.\, 2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2 \ldots (n-1)^2$$

6) $f(x) = x \operatorname{cotang} x$

Schreibt man

$$x \cos x = f(x) \sin x,$$

so folgt nach dem Leibniz'schen Satze durch n malige Differentiation

$$x \frac{d^n (\cos x)}{d x^n} + n \frac{d^{n-1} (\cos x)}{d x^{n-1}} = f(x) \frac{d^n (\sin x)}{d x^n} + \binom{n}{1} f'(x) \frac{d^{n-1} (\sin x)}{d x^{n-1}} +$$

$$+ \binom{n}{2} f''(x) \frac{d^{n-2} (\sin x)}{d x^{n-2}} + \ldots + f^{(n)}(x) \sin x$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so verschwindet das Glied, welches $f^{(n)}(x)$ enthält, und es wird $f^{(n-1)}(x)$ als Funktion aller vorhergehenden Ableitungen erhalten. Da $f(x)$ eine gerade Funktion von x ist, so erkennt man leicht, dass alle Ableitungen ungerader Ordnung verschwinden.

Es ist also:

$$n \cos \left[(n-1) \frac{\pi}{2}\right] = f(0) \sin \left[\frac{n \pi}{2}\right] + \binom{n}{2} f''(0) \sin \left[(n-2) \frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+ \binom{n}{4} f^{IV}(0) \sin \left[(n-4) \frac{\pi}{2}\right] + \ldots$$

Man findet demnach:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -\tfrac{2}{3},\ f'''(0) = 0,\ f''''(0) = -\tfrac{8}{15}, \text{ etc.}$$

7) $f(x) = \sin (m \arcsin x)$

$$f'(x) = \frac{m \cos (m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{m x \cos (m \arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \sin (m \arcsin x)}{1-x^2}$$

Hieraus folgt

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) + m^2 f(x) = 0.$$

Differentiiert man Glied für Glied p mal, so erhält man

$$(1-x^2)\,f^{(p+2)}(x) - \binom{2p}{1}\,x\,f^{(p+1)}(x) - 2\binom{p}{2}\,f^{(p)}(x) - x\,f^{(p+1)}(x) -$$
$$-\binom{p}{1}\,f^{(p)}(x) + m^2 f^{(p)}(x) = 0$$

und für $x = 0$

$$f^{(p+2)}(0) = (p^2 - m^2)\,f^{(p)}(0).$$

Alle Ableitungen gerader Ordnung sind gleich Null und

$$f^{(2n+1)}(0) = m\,(1^2 - m^2)\,(3^2 - m^2)\,(5^2 - m^2)\ldots[(2\,n-1)^2 - m^2]$$

8) $f(x) = \cos(m \arc \sin x)$

$$f^{(2n+1)}(0) = 0,\; f^{(2n+2)}(0) = -m^2(2^2-m^2)\,(4^2-m^2)\,(6^2-m^2)\ldots[(2n)^2-m^2]$$

Anmerkung. In den vorstehenden Formeln bezeichnet $\arc \sin x$ denjenigen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen des Kreises mit dem Radius 1, dessen sinus gleich x ist. Da der cosinus dieses Bogens immer positiv ist, so ist in Beispiel 8) $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

9) $f(x) = \cos(m \arc \cos x)$

Wenn m eine ungerade Zahl bezeichnet, so wird

$$f^{(2n+1)}(0) = m\,(1^2 - m^2)\,(3^2 - m^2)\ldots[(2n-1)^2 - m^2 \sin\frac{m\,\pi}{2}$$
$$f^{(2n)}(0) = 0;$$

für ein gerades m dagegen kommt

$$f^{(2n+2)}(0) = -m^2\,(2^2 - m^2)\,(4^2 - m^2)\ldots[(2\,n)^2 - m^2]\cos\frac{m\,\pi}{2}$$
$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Anmerkung. In diesem Beispiele bedeutet $\arc \cos x$ denjenigen zwischen 0 und π liegenden Bogen des Kreises mit dem Radius 1, dessen cosinus gleich x ist.

10) $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \arc \operatorname{tang} x)$

Indem man aus den drei für $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ erhaltenen Gleichungen $\sin(m \arc \operatorname{tang} x)$ und $\cos(m \arc \operatorname{tang} x)$ eliminiert, erhält man

$$(1 + x^2)\,f''(x) - 2\,(m-1)\,x\,f'(x) + (m^2 - m)\,f(x) = 0$$

und hieraus durch p malige Differentiation nach dem Leibniz'schen Satze

$$(1+x^2)f^{(p+2)}(x)+2\binom{p}{1}xf^{(p+1)}(x)+2\binom{p}{2}f^{(p)}(x)-2(m-1)xf^{(p+1)}(x)-$$
$$-2(m-1)\binom{p}{1}f^{(p)}(x)+(m^2-m)f^{(p)}(x)=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=0$, so folgt

$$f^{(p+2)}(0)=-f^{(p)}(0)(m-p)(m-p-1).$$

Demnach wird, indem man arc tang $0=0$ voraussetzt

$$f^{(2n+2)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)(m-2n).$$

11) $$f(x)=\frac{\cos(m \operatorname{arc\,tang} x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

$$f^{(2n+1)}(0)=0,\ f^{(2n)}(0)=(-1)^n m(m+1)\ldots(m+2n-1).$$

Kapitel III.

Differentiale von entwickelten Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

§ 8. Allgemeine Sätze.

Bedeutet $f(x, y)$ eine beliebige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y und werden deren partielle Ableitungen nach Jacobi mittelst des charakteristischen ∂ mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, etc. bezeichnet, während zur Bezeichnung der Differentiale das Zeichen d verwendet wird, so gelten für die Differentiation dieser Funktion folgende Sätze:

Es sei $f = f(x, y)$

I. $$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}$$

II. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

III. $$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \ldots$$
$$+ \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k + \ldots n \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx\, dy^{n-1} +$$
$$+ \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n \doteq \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f$$

Hierbei ist die letzte Bezeichnungsweise in dem Sinne zu verstehen, dass nach ausgeführter Entwicklung der $n$ten Potenz statt $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}$ zu setzen ist.

Allgemein ist, wenn $f = f(x, y, z \ldots)$

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \ldots\right)^n f$$

IV. Bezeichnet $F = F(u, v)$ eine mittelbare Funktion von x, indem $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ Funktionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen x bedeuten, so ist

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial u}\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2 v}{dx^2}, \text{ etc.}$$

wo $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$, $\frac{dv}{dx} = \psi'(x)$,

$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi''(x)$, $\frac{d^2 v}{dx^2} = \psi''(x)$, etc.

Diese Formeln für $\frac{dF}{dx}, \frac{d^2 F}{dx^2}$, etc. bleiben auch dann noch bestehen, wenn $u = f(x, y)$ und $v = g(x, y)$ Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y bezeichnen; nur ist in diesem Falle

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

etc.

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy,$$

$$d^2 v = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} d^2 x + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy^2,$$

etc., woraus sich $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^2 u}{dy^2}$ etc. leicht berechnen lassen.

Anmerkung. Die symbolische Gleichung

$$d^n F(u, v, \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \ldots\right)^n F,$$

welche zunächst nur Gültigkeit besitzt, wenn $u, v \ldots$ unabhängige Veränderliche sind, behält ihre Bedeutung auch dann, wenn $u, v \ldots$ nicht mehr die unabhängigen Variablen selbst, sondern ganze lineare Funktionen derselben sind.

§ 9. Beispiele.

Es empfiehlt sich, zur Übung in diesem und dem folgenden Kapitel Ausdrücke wie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ auf verschiedene Arten zu berechnen, wobei natürlich Formel II bestätigt gefunden werden muss.

1) $$u = 27\,x^3 + 27\,x^2\,y + 9\,x\,y^2 + y^3 + 81$$
$$d\,u = 3\,(3\,x + y)^2\,(3\,d\,x + d\,y)$$

2) $$u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$d\,u = -\frac{4\,(x\,d\,x + y\,d\,y)}{(x^2 + y^2)^3}$$

3) $$u = \frac{(y + a)^n}{(y + b)^m}$$
$$d\,u = \frac{(x + a)^{n-1}\,[n\,(y + b)\,d\,x - m\,(x + a)\,d\,y]}{(y + b)^{m+1}}$$

4) $$u = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$
$$d\,u = \frac{-\sqrt{y}\,d\,x + \sqrt{x}\,d\,y}{2\,\sqrt{x\,y}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

5) $$u = y\,l\,x = l\,x^y$$
$$d\,u = \frac{y}{x}\,d\,x + l\,x\,d\,y$$
$$d^2\,u = -\frac{y}{x^2}\,d x^2 + \frac{2}{x}\,d\,x\,d\,y$$
$$d^3\,u = \frac{2\,y}{x^3}\,d\,x^3 - \frac{3}{x^2}\,d\,x^2\,d\,y$$

6) $$u = l\frac{x + y}{x - y}$$
$$d\,u = -\frac{2\,y}{x^2 - y^2}\,d\,x + \frac{2\,x}{x^2 - y^2}\,d\,y$$
$$d^2\,u = \frac{4\,x\,y}{(x^2 - y^2)^2}\,d\,x^2 - 4\,\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}\,d\,x\,d\,y + \frac{4\,x\,y}{(x^2 - y^2)^2}\,d\,y^2$$

$$d^3 u = -\frac{4y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx^3 + \frac{12x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx^2\,dy -$$
$$-\frac{12y(3x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dx\,dy^2 + \frac{4x(x^2+3y^2)}{(x^2-y^2)^3}\,dy^3$$

7) $u = l\sqrt{\dfrac{ax+by}{ax-by}}$

$$du = \frac{ab(x\,dy - y\,dx)}{a^2x^2 - b^2y^2}$$

8) $u = xy\,e^{x+2y}$

$$du = e^{x+2y}\,[y(1+x)\,dx + x(1+2y)\,dy]$$

9) $u = y^x$

$$du = y^x\,l y\,dx + x\,y^{x-1}\,dy$$
$$d^2 u = y^x(ly)^2 dx^2 + 2y^{x-1}(1+x\,ly)\,dx\,dy + x(x-1)\,y^{x-2}\,dy^2$$

10) $u = \dfrac{y\,e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$du = \frac{(x^2+y^2-x)\,y\,e^x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{x^2\,e^x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy$$

11) $u = \sin x \cos y$

$$du = \cos x \cos y\,dx - \sin x \sin y\,dy$$
$$d^2 u = -\sin x \cos y\,dx^2 - 2\cos x \sin y\,dx\,dy - \sin x \cos y\,dy^2$$
$$d^3 u = -\cos x \cos y\,dx^3 + 3\sin x \sin y\,dx^2\,dy -$$
$$-3\cos x \cos y\,dx\,dy^2 + \sin x \sin y\,dy^3$$

12) $u = \text{arc tang}\,\dfrac{x}{y}$

$$du = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
$$d^2 u = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx^2 + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy^2$$
$$d^3 u = \frac{-2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx^3 - \frac{6x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx^2\,dy +$$
$$+\frac{6y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy^2 + \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dy^3$$

13) $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{x-y}{x+y}$

$$d\,u = \frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{x^2+y^2}$$

14) $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{2\,x + y - x^2\,y}{1 - 2\,x\,y - x^2}$

$$d\,u = \frac{2\,d\,x}{1+x^2} + \frac{d\,y}{1+y^2}$$

15) $u = \operatorname{arc\,cos} \frac{1 - x\,y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2\,y^2}}$

$$d\,u = \frac{d\,x}{1+x^2} + \frac{d\,y}{1+y^2}$$

16) $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{x\,y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Man bestimme $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} = \frac{15\,x\,y}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}}$$

17) $u = l \sin \frac{x}{y}$

$$d\,u = \frac{1}{y^2}(y\,d\,x - x\,d\,y) \operatorname{cotang} \frac{x}{y}$$

18) $u = l \operatorname{tang} \frac{x}{y}$

$$d\,u = \frac{2\,(y\,d\,x - x\,d\,y)}{y^2 \sin \frac{2\,x}{y}}$$

19) $u = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

$$d\,u = \frac{\sqrt{2}\,x\,y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}\,d\,x - \frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}\,d\,y$$

20) $u = a\,x\,y\,z + b\,x\,y + c\,x\,z + e\,y\,z + g\,\frac{x}{y} + h\,\frac{x}{z} + k\,\frac{y}{z} +$
$+ m\,x + n\,y + p\,z$

$$du = \left(ayz + by + cz + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} + m\right)dx +$$
$$+ \left(axz + bx + ez - g\frac{x}{y^2} + \frac{k}{z} + n\right)dy +$$
$$+ \left(axy + cx + ey - h\frac{x}{z^2} - k\frac{y}{z^2} + p\right)dz$$

21) $u = \dfrac{x^2 y}{a^2 - z^2}$

$$du = \frac{2xy}{a^2 - z^2}dx + \frac{x^2}{a^2 - z^2}dy + \frac{2x^2yz}{(a^2 - z^2)^2}dz$$

22) $u = \dfrac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{x + y + z}$

$$du = \frac{(y+z)(z^2 + 2xy) + y(x^2 - yz)}{(x+y+z)^2}dx +$$
$$+ \frac{(z+x)(x^2 + 2yz) + z(y^2 - xz)}{(x+y+z)^2}dy +$$
$$+ \frac{(x+y)(y^2 + 2xz) + x(z^2 - xy)}{(x+y+z)^2}dz$$

23) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + yz$

$$du = -\frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx + z\,dy + y\,dz$$

$$d^2u = \frac{3}{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2 + 2\,dy\,dz$$

$$d^3u = -\frac{15}{8(x-1)^{\frac{7}{2}}}dx^3$$

24) $u = l\sqrt{\dfrac{y + \sqrt{x^2 - z^2}}{y - \sqrt{x^2 - z^2}}}$

$$du = \frac{xy\,dx + (z^2 - x^2)\,dy - yz\,dz}{(y^2 - x^2 + z^2)\sqrt{x^2 - z^2}}$$

25) $u = z^{(y^x)}$

$$du = z^{(y^x)} \,.\, y^x \,.\, \left[ly \,.\, lz \,.\, dx + \frac{x}{y} \,.\, lz \,.\, dy + \frac{1}{z} \,.\, dz\right]$$

26) $u = \frac{m \sin y - n \sin z}{p \sin z - m \sin x}$

$$du = \frac{m \cos x (m \sin y - n \sin z) dx + m \cos y (p \sin z - m \sin x) dy + m \cos z (n \sin x - p \sin y}{(p \sin z - m \sin x)^2}$$

27) $u = \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{x y}$

$$d u = \frac{y z \, d x + z x \, d y - x y \, d z}{x y \sqrt{x^2 y^2 - z^2}}$$

28) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}$

$$d u = \frac{x \, d x + y \, d y + z \, d z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z \, d x - x \, d z}{z^2 + x^2} + z \, d z$$

29) $u = x y z$

Zu berechnen $d^3 u$ und $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$d^3 u = 6 \, d x \, d y \, d z$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 1$

30) $u = x^3 + y^3 + z^3$

Zu berechnen $d^3 u$.

$d^3 u = 6 (d x^3 + d y^3 + d z^3)$

31) $u = e^{x y z}$

Man berechne $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3 x y z + x^2 y^2 z^2) \, e^{x y z}$$

32) $u = \frac{x y z t}{x + y + z + t}$

$$du = \frac{(y+z+t) y z t \, dx + (z+t+x) z t x \, dy + (t+x+y) t x y \, dz + (x+y+z) x y z}{(x+y+z+t)^2}$$

Kapitel IV.

Differentiale unentwickelter Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen.

§ 10. Allgemeine Sätze.

Wenn die abhängige Veränderliche y mit der unabhängigen Veränderlichen x durch eine Gleichung von der Form $F(x, y) = 0$ verbunden erscheint, so heisst y eine unentwickelte oder implizite Funktion von x, wenn man sich die Gleichung nicht nach y aufgelöst denkt.

Bei der Differentiation unentwickelter Funktionen sind sowohl die Fälle einer und mehrerer unabhängigen Veränderlichen, als auch die Fälle einer und mehrerer abhängigen Veränderlichen zu unterscheiden.

1) Ist im einfachsten Falle eine Gleichung mit zwei Veränderlichen gegeben $F(x; y) = 0$, so kann das Differential der abhängigen Veränderlichen y dadurch gefunden werden, dass man das vollständige Differential dF, genommen in Bezug auf die beiden Veränderlichen x und y, gleich Null setzt und aus der entstandenen Gleichung dy bestimmt.

Ist also gegeben $F(x; y) = 0$,
so ergibt die angedeutete Regel

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

und hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Die nochmalige Differentiation dieses Ausdrucks oder der vorhergehenden Gleichung nach x, wobei y als Funktion von x

zu betrachten und der gefundene Wert von $\frac{dy}{dx}$ einzusetzen ist, ergibt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

2) Liegen m Gleichungen

$$\begin{gathered} F_1 (x; y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \\ F_2 (x; y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_m (x; y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \end{gathered}$$

zwischen den m abhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_m$ und der einzigen unabhängigen Veränderlichen x vor, so werden die Differentiale der m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf folgende Weise bestimmt: Man setze die vollständigen Differentiale der Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_m$ in Bezug auf sämtliche Veränderliche gleich Null, wodurch man ein System von m Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0 \\ dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dF_m &= \frac{\partial F_m}{\partial x} dx + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0 \end{aligned}$$

Da nun diese m Gleichungen in Beziehung auf die Differentiale $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$ linear sind, so können aus denselben die gesuchten Differentiale berechnet werden. Die Auflösung dieses Systems von m linearen Gleichungen wird bekanntlich durch Anwendung der Determinanten wesentlich erleichtert. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinde.

Für den Fall von zwei Gleichungen mit drei Veränderlichen

$$F_1(x; y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(x; y_1, y_2) = 0$$

führt folgende Rechnung zum Ziel: Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} dy_2 = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} dy_2 = 0,$$

und hieraus folgt

$$dy_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} \cdot dx, \quad dy_2 = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} \cdot dx.$$

Hieraus ergibt sich natürlich sofort $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$.

Anmerkung. Die Rechnungsvorschrift für Determinanten mit 4 Elementen liegt ausgesprochen in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Zur Auswertung einer Determinante mit 9 Elementen (aber nur für diese) gilt folgende mechanische Regel: Man denke sich neben der dritten Kolumne die erste und zweite wiederholt und führe dann die Multiplikation nach Anleitung des folgenden Schema aus

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - \\ - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2$$

3) Ist eine Gleichung $F(x, y; z) = 0$ zwischen den drei Veränderlichen x, y, z gegeben und wird z als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y angesehen, so werden die

partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ dadurch erhalten, dass man das vollständige Differential von F, genommen in Bezug auf x, y, z, gleich Null setzt und die so entstandene Gleichung in Bezug auf dz auflöst. Die Koeffizienten von dx und dy sind die gesuchten Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$. Darnach hätte man z. B., wenn gegeben ist

$$F(x, y; z) = 0,$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

4) Sind endlich m Gleichungen mit $(m + n)$ Veränderlichen gegeben, so können im Allgemeinen in Folge dieser Gleichungen m dieser Grössen als Funktionen der übrigen Variablen betrachtet werden, und es ergeben sich die Differentiale dieser m impliziten Funktionen durch die Verbindung der für die Fälle 2) und 3) gegebenen Vorschriften. Es wird hierbei die Kenntnis der elementarsten Sätze aus der Determinantentheorie vorausgesetzt.

Es sei

$$F_1 (x_1, x_2, \ldots x_n; \; y_1, y_2 \ldots y_m) = 0,$$
$$F_2 (x_1, x_2, \ldots x_n; \; y_1, y_2 \ldots y_m) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m (x_1, x_2, \ldots x_n; \; y_1, y_2 \ldots y_m) = 0.$$

Dann ist

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_k} dy_k + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m =$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dF_n = \frac{\partial F_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_k} dy_k + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_m} dy_m =$$

Hieraus folgt

$$dy_k = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F_1}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n, \frac{\partial F_1}{\partial y_{k+1}},\ldots\frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F_2}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n, \frac{\partial F_2}{\partial y_{k+1}},\ldots\frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_m}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n, \frac{\partial F_m}{\partial y_{k+1}},\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F_1}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial y_k}, \frac{\partial F_1}{\partial y_{k+1}},\ldots\frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F_2}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial F_2}{\partial y_k}, \frac{\partial F_2}{\partial y_{k+1}},\ldots\frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_{k-1}} \; \frac{\partial F_m}{\partial y_k} \; \frac{\partial F_m}{\partial y_{k+1}}\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}}$$

Ordnet man $d\,y_k$ nach $d\,x_1 \ldots d\,x_n$, so ergebe dies:

$$d\,y_k = \Phi_1\,d\,x_1 + \Phi_2\,d\,x_2 \ldots + \Phi_n\,d\,x_n,$$

wobei die Funktionen Φ aus den bekannten Ableitungen von F, die in den Determinanten auftreten, nach den Regeln der Determinantentheorie auf bekannte Weise zusammengesetzt, mithin selbst bekannt sind. Dann ist

$$\frac{\partial\,y_k}{\partial\,x_l} = \Phi_l\,.$$

Hieraus lassen sich dann die höheren partiellen Ableitungen bilden, wenn man nicht vorzieht, sie nach mehrfacher Differentiation der Gleichungen F analog wie die ersten Ableitungen zu bestimmen.

§ 11. Beispiele zur Differentiation unentwickelter Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

1) $$f = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + B},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\triangle}{(Bx + Cy + E)^3}, \text{ wenn } \triangle = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

2) $$f = y^5 - 5 a x y + x^5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} =$$

$$= \frac{2a(x^4 - ax)(ay - x^4) - 4y^3(x^4 - ay)^2 - 4x^3(y^4 - ax)^2}{(y^4 - ax)^3}$$

3) $$f = (x^2 + y^2 - b x)^2 - a^2 (x^2 + y^2) = 0$$

(Schnecke (Limaçon) von Pascal.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{a^2 x - (x^2 + y^2 - b x)(2x - b)}{2(x^2 + y^2 - b x) - a^2}$$

4) $$y^n - \frac{x + y}{x - y} = 0$$

Multipliziert man nach der Differentiation Dividend und Divisor mit y und ersetzt $\frac{x+y}{x-y}$ durch y^n, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 y^2}{n(x^2 - y^2) - 2xy}$$

5) $$x^n - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n(x^4 - y^4) + 4x^2 y^2}{4x^3 y}$$

6) $$(x + y)^{\frac{3}{2}} + (x - y)^{\frac{3}{2}} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2x^3 + (2x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}{y^3 \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

7) $$a x + b y + x y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a + y)(a x + b y + x y) - x}{y - (b + x)(a x + b y + x y)}$$

8) $e^y = x^{y+x}$

oder $y = (x + y)\, l\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1 + l\,x) + y}{x(1 - l\,x)}$$

9) $e^{x+y} = x^y$

oder $x + y = y\, l\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x(1 - l\,x)}$$

10) $x\,y = l\,(e^{xy} + e^{-xy})$

oder $e^{-xy} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Zu demselben Resultate führt auch $c + x\,y = l\,(e^{xy} + e^{-xy})$

11) $y^x = x^y$

oder $y\, l\, x = x\, l\, y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x\,l\,y}{x - y\,l\,x} = \frac{y^2 (l\,x - 1)}{x^2 (l\,y - 1)}$$

12) $y = 1 + x\,e^y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2 - y}$$

13) $y\,e^{ny} = a\,x^m$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\,y}{x(1 + n\,y)}$$

14) $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{2 \sin 2y - \sin y - x \cos y} = \frac{\sin^2 y}{\sin y \sin 2y + \cos y - 1}$$

15) $y \sin x - \cos (x - y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x + \sin (x - y)}{\sin (x - y) - \sin x} = \frac{1 - 2y \sin y + y^2}{1 - \cos y - y \sin y}$$

16) $\sin (xy) = m\,x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m - y \cos (x\,y)}{x \cos (x\,y)}$$

17) $y\, l\, x = x \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin y - y}{x(l\,x - x \cos y)} = \frac{y}{x^2} \cdot \frac{y - x \sin y}{y \cos y - \sin y}$$

18) $\frac{m^2 \sin^2 x}{a^2 - m^2} = \frac{n^2 \sin^2 (x + y)}{a^2 - n^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m^2 (a^2 - n^2)}{n^2 (a^2 - m^2)} \cdot \frac{\sin x \cos x}{\sin (x + y) \cos (x + y)} - 1 =$$

$$= \frac{m}{n} \sqrt{\frac{a^2 - n^2}{a^2 - m^2}} \cdot \frac{\cos x}{\cos (x + y)} - 1$$

19) $4 y^3 - 3 y + \sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3} \frac{\cos x}{(1 - 4 y^2)} = \tfrac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$$

20) $y \sin n x = a e^{nx+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n y}{1 - y} (1 - \operatorname{cotang} n x)$$

21) $\operatorname{tang} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

$$l \operatorname{tang} \frac{y}{2} = \tfrac{1}{2} l (1 - x) - \tfrac{1}{2} l (1 + x)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin y}{1 - x^2} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

22) $y \sin x = x \operatorname{arc tang} y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (1 + y^2) \frac{x \cos x - \sin x}{x - (1 + y^2) \sin x}$$

23) $x y = \operatorname{arc tang} \frac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - (x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)}$$

24) $\frac{y}{x} = \operatorname{arc tang} \frac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Anmerkung. Da diese Gleichung zwischen x und y nur das Verhältnis $\frac{y}{x} = z$ enthält, so ist dieses Verhältnis eine Konstante, welche aus der Gleichung $z \operatorname{tang} z = 1$ zu bestimmen ist.

25) $\operatorname{arc\,tang} \frac{x-a}{x+a} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y-a}{y+a} = \operatorname{arc\,tang} \frac{b-a}{b+a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}$$

26) $\arcsin \frac{x}{m} + \arcsin \frac{y}{n} = e^{-\operatorname{tang} \frac{m}{n}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{n^2-y^2}{m^2-x^2}}$$

27) $y^3 - 3y \arcsin x + x^3 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2\sqrt{1-x^2}}{(y^2 - \arcsin x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{3y(y - x^2\sqrt{1-x^2})}{(2y^3 - x^3)\sqrt{1-x^2}}$$

28) $y x^y \arcsin x + \arccos \frac{m-1}{n} = 0$

$$\frac{dy}{dy} = -\frac{y}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x + y\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\arcsin x\,(1 + y\,l\,x)}$$

29) $\arcsin \left(\frac{y^3+x^3-3x^2y}{y^3+x^3-3xy^2}\right)^{\frac{1}{3}} = a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Man erkennt leicht, dass der gegebene Ausdruck nur von dem Verhältnis $\frac{y}{x} = z$ der beiden Veränderlichen x und y abhängt. Der konstante Wert dieses Verhältnisses bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{z^3 - 3z + 1}{z^3 - 3z^2 + 1} = \sin^3 a.$$

30) $a^{xy} + \sqrt{\sec(xy)} = l \operatorname{cotang} a$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^{xy} \cdot y \cdot x^{y-1} \cdot la + y \operatorname{tang}(xy)\sqrt{\sec(xy)}}{2a^{xy} \cdot x^y \cdot lx \cdot la + x \operatorname{tang}(xy)\sqrt{\sec(xy)}}$$

31) $x^3 + y^2 - 3z + a = 0$

$z^2 - 2y^2 - x + b = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-2x^2z)}{4y(z-3)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1-6x^2}{2(z-3)}$$

32) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

$x+y+k=a$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z}.$$

33) $\operatorname{tang}(x+y)+\sin z=\cos a$

$\operatorname{tang}(x-y)+\sin z=\operatorname{tang} a$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(x+y)-\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)},$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{\cos z\,[\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)]}.$$

34) $x+y+z+u=a$

$x^2+y^2+z^2+u^2=b$

$x^3+y^3+z^3+u^3=c$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)},$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-x)}{(z-u)(y-u)}.$$

35) $u^2+x^2+y^2+z^2=a^2$

$l(xy)+\frac{y}{x}=b^2$

$l\frac{z}{x}+xz=0$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\cdot\frac{xz-1}{xz+1}-x\right].$$

§ 12. Beispiele zur Differentiation unentwickelter Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Dreiaxiges Ellipsoid.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{a^4}\,\frac{a^2z^2+c^2x^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\,\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^2}{b^4}\,\frac{b^2z^2+c^2y^2}{z^3}.$$

2) $\frac{(x-mz)^2}{a^2}+\frac{(y-nz)^2}{b^2}=1$ (Elliptischer Zylinder.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{b^2(x-mz)}{a^2n(y-nz)+b^2m(x-mz)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a^2(y-nz)}{a^2n(y-nz)+b^2m(x-mz)}.$$

3) $\frac{y^2}{a}-\frac{z^2}{b}=2x$ (Hyperbolisches Paraboloid.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{by}{az},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{b^2y}{az^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{b}{a^2}\frac{az^2-by^2}{z^3}.$$

4) $\frac{x}{y}=\operatorname{tang} az$ (Schraubenfläche.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos^2 az}{ay},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\cos^2 az}{ay^2},$$

5) $xy+xz=y^2+z^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+z}{2z-x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-2y}{2z-x},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{(y+z)(z-x-y)}{(2z-x)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=4\frac{y^2+z^2-xz}{(2z-x)^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{(2z-x)^2+(x-2y)^2}{(2z-x)^3}.$$

6) $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2(x^2-y^2+z^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}\frac{A}{B},$$

wenn $A=x^2+y^2+z^2+a^2$ und $B=x^2+y^2+z^2-a^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{z^3}\frac{A}{B},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4a^2y^2z^2-A(Bz^2+Ay^2)}{B^2z^3}.$$

7) $x^3+y^3+z^3=xy+xz+yz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2-y-z}{x+y-3z^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2-x-z}{x+y-3z^2}.$$

8) $xy + xz + yz = xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + z - yz}{xy - x - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + z - xz}{xy - x - y}.$$

9) $xly - ylx = xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xly - y - xyz}{x^2 y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - ylx - xyz}{xy^2}.$$

10) $e^{ax+by+cz} = a_1 x + b_1 y + c_1 z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(a_1 x + b_1 y + c_1 z) - a_1}{c_1 - c(a_1 x + b_1 y + c_1 z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b(a_1 x + b_1 y + c_1 z) - b_1}{c_1 - c(a_1 x + b_1 y + c_1 z)}.$$

11) $z^3 = y e^{x+z}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y e^{x+z}}{3z^2 - y e^{x+z}} = -\frac{z}{z-3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{x+z}}{3z^2 - y e^{x+z}} = -\frac{z}{y(z-3)}.$$

12) $x^x . y^y . z^z = a$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{lx+1}{lz+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{ly+1}{lz+1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z(lz+1)^2 + x(lx+1)^2}{xz(lz+1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(lx+1)(ly+1)}{z(lz+1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z(lz+1)^2 + y(ly+1)^2}{yz(lz+1)^3}.$$

13) $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = (x^2 + y^2) z u + (z^2 + u^2) x y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y(z^2 + u^2) + 2xzu - 4x^3}{z(x^2 + y^2) + 2xyu - 4u^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x(z^2 + u^2) + 2yzu - 4y^3}{z(x^2 + y^2) + 2xyu - 4u^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{u(x^2 + y^2) + 2xyz - 4z^3}{z(x^2 + y^2) + 2xyu - 4u^3}.$$

14) $\text{arc cotang}\,\dfrac{u+z-1}{u-z+1} = \text{arc tang}\,\dfrac{y+x-1}{y-x+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z-1}\cdot\frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}=-\frac{u}{x-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x-1}{z-1}\cdot\frac{u^2+(z-1)^2}{y^2+(x-1)^2}=-\frac{z-1}{x-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{u}{z-1}=-\frac{y}{x-1}.$$

15) $x+y+z+u=a$

$x^3+y^3+z^3+u^3=b$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{u^2-x^2}{u^2-z^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{u^2-y^2}{u^2-z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z^2-x^2}{u^2-z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z^2-y^2}{u^2-z^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\,\frac{u(x^2-z^2)^2+x(u^2-z^2)^2+z(u^2-x^2)^2}{(u^2-z^2)^3}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\,\frac{u(z^2-x^2)(z^2-y^2)+z(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(u^2-z^2)^3}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\,\frac{y(u^2-z^2)^2+z(y^2-u^2)^2+u(z^2-y^2)^2}{(u^2-z^2)^3}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

16) $xy+6zu=10$

$x+y-8z-12u=5$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y+z}{4(2z-3u)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x+z}{4(2z-3u)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4y+3u}{12(2z-3u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4x+3u}{12(2z-3u)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(2y+z)(4y+3u)}{8(2z-3u)^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(3u+4x)(2y+z)+(2x+z)(4y+3u)-8(2z-3u)^2}{16(2z-3u)^3}=$$

$$=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{(4x+3u)(2x+z)}{8(2z-3u)^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

17) $x+y+z+u=a$

$xyzu=b$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{u}\cdot\frac{u-x}{u-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y}\cdot\frac{u-y}{u-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u}{x}\cdot\frac{z-x}{z-u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{u}{y}\cdot\frac{z-y}{z-u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z\,u}{x^2(u-z)^3}[(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2]=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{z\,u}{x\,y\,(u-z)^3}[(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)]=-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{z\,u}{y^2(u-z)^3}[(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2]=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

18) $x+y+z=u\,v$

$x+y+u=v\,z$

$x+y+v=z\,u$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(1+u+v-z)(1+z)}{u^2+v^2+z^2+2\,u\,v\,z-1}=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1+v+z-u)(1+u)}{u^2+v^2+z^2+2\,u\,v\,z-1}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(1+u+z-v)(1+v)}{u^2+v^2+z^2+2\,u\,v\,z-1}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

§ 13. Allgemeine Sätze.

1) Soll in einem Ausdrucke von der Form

$$1)\quad F\left(x; y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\right),$$

wo F eine gegebene Funktion bedeutet, statt der Grösse x eine andere veränderliche Grösse t als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, welche mit x durch die Gleichung

$$\varphi(x, t)=0$$

verbunden sein möge, so kann zur Berechnung der Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ folgendes Verfahren eingeschlagen werden:

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

indem y als Funktion von t, d. h. als mittelbare Funktion von x betrachtet wird und hierauf die früheren Sätze (§ 1) angewendet werden.

Die weitere Differentiation der erhaltenen Gleichung nach x ergibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d^3y}{dt^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

etc.,

wo auf den rechten Seiten für $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ die aus der Gleichung $\varphi(x, t) = 0$ (nach § 10) sich ergebenden Werte einzusetzen sind.

In dem sich häufig darbietenden Falle, wo y als unabhängige Variable betrachtet werden soll, können die nötigen Formeln aus den vorigen durch die Spezialisierung $t = y$ oder auch direkt auf analoge Weise erhalten werden.

2) Wenn es darauf ankommt, den Ausdruck F durch Einführung zweier neuen veränderlichen Grössen t und u umzugestalten, welche mit den vorigen durch die Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, t, u) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, t, u) = 0$$

zusammenhängen, so dass t als unabhängige Variable und u als abhängige veränderliche Grösse betrachtet wird, so hat man nur

in den obigen Formeln an die Stelle von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, etc. ihre aus den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ (nach § 10) folgenden Werte zu setzen.

3) Um in einem Ausdrucke von der Form

$$2) \quad F\left(x, y; z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

statt der unabhängigen Veränderlichen x und y zwei neue veränderliche Grössen u und v mittelst der Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, u, v) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, u, v) = 0$$

als unabhängige Variable einzuführen, kann man von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$
etc.

ausgehen, in welche man für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, etc. die aus den Gleichungen $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ (nach § 10) folgenden Werte einzusetzen hat.

Anmerkung. In denjenigen Fällen, wo sich die Gleichungen $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ leicht nach x und y auflösen lassen, ist es vorzuziehen, von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{dz}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$
etc.

auszugehen. Das weitere Verfahren ist dem vorigen ganz analog.

4) Es seien endlich in dem Ausdrucke 2) anstatt der drei veränderlichen Grössen x, y, z drei neue veränderliche Grössen u, v, w einzuführen, welche mit den früheren durch die Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z, u, v, w) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, z, u, v, w) = 0,$$
$$\varphi_3(x, y, z, u, v, w) = 0$$

verbunden sind und von denen w als abhängige, u und v als unabhängige Variablen betrachtet werden sollen.

Ausgehend von den Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

etc.,

in welche man für $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, etc. die aus den Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ (nach § 10) folgenden Werte zu setzen hat, erhält man neue Gleichungen, aus welchen man die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc. entnehmen und in 2) substituieren kann.

Anmerkung. Sind aus den gegebenen Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ die Grössen x, y, z leicht als Funktionen von u, v, w zu erhalten, so wird es in vielen Fällen vorzuziehen sein, von den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

etc.

auszugehen.

§ 14. Beispiele.

1) In der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(y-a)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

soll y als unabhängige Veränderliche eingeführt werden.

Es wird

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-(y-a)\frac{d^2x}{dy^2}=0.$$

2) Zur Berechnung des Krümmungshalbmessers einer ebenen Kurve, bei welcher y als Funktion von x betrachtet wird, dient die Formel

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Dieser Ausdruck geht, wenn x als abhängige, y als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, in den folgenden über:

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2 x}{dy^2}}.$$

3) In der Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + u = 0$$

soll y mittelst der Relation $y = lx$ als unabhängige Veränderliche eingeführt werden. Man erhält

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + u = 0.$$

4) $(1-x^2)^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$

$x = \sin t;$

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1 = 0.$$

5) $y + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,\ x^2 = 4t;$

$$y + \frac{dy}{dt} + t\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

(Fourier, Traité de la chaleur).

6) In der Gleichung

$$\frac{du}{dy} + \frac{u}{\sqrt{1+y^2}} = a$$

soll $x = l(y + \sqrt{1+y^2})$ als unabhängige Variable eingeführt werden.

Der Ausdruck für x gibt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

folglich wird

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Aus der Gleichung zwischen x und y folgt ferner

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}, \text{ daher } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und

$$\sqrt{1 + y^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Setzt man die so erhaltenen Werte ein, so ergibt sich

$$\frac{du}{dx} + u = \frac{a}{2}(e^x + e^{-x}).$$

7) $$(1 - y^2)\frac{d^2 u}{d y^2} - y \frac{du}{dy} + n^2 u = 0, \; x = \arccos y;$$

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + n^2 u = 0.$$

8) $$(x - x^3)\frac{d^2 y}{d x^2} + (1 - 3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0, \; x = \sqrt{1 - t^2};$$

$$(t - t^3)\frac{d^2 y}{d t^2} + (1 - 3t^2)\frac{dy}{dt} - ty = 0.$$

9) $$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}},$$

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi;$$

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}},$$

wenn φ als unabhängige Variable betrachtet werden soll; dagegen

$$\varrho = \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2\frac{d\varphi}{dr} + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^3 + r\frac{d^2\varphi}{dr^2}},$$

wenn r als unabhängige Variable betrachtet werden soll.

10) Unter der Voraussetzung, dass

$$u = \left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)^2, \quad \left(\frac{d x}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d s}\right)^2 = 1$$

soll bewiesen werden, dass

$$u\left(\frac{d s}{d t}\right)^4 = \left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)^2.$$

11) Es sei u eine Funktion von r. Setzt man $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Es soll hieraus eine Gleichung hergeleitet werden, in welcher u nur in Bezug auf r differentiiert vorkommt.

$$\frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d u}{d r} = 0.$$

12) Welchen Wert hat der Ausdruck

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

wenn

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

gesetzt wird, wo r und φ zwei neue unabhängige veränderliche Grössen bedeuten?

Man erhält

$$r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

13)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

14) Wenn x, y, z und ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes des Raumes in zwei verschiedenen rechtwinkligen Koordinatensystemen bezeichnen, so ist zu zeigen, dass, wenn u eine Funktion von x, y, z bezeichnet,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe setzt die Kenntnis derjenigen Formeln der analytischen Geometrie des Raumes voraus, welche die Koordinatentransformation betreffen.

15) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=r\cos\vartheta.$$

Führt man die Hülfsgrösse $\varrho=r\sin\vartheta$ ein, so erhält man nach Aufgabe 13)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{cotang}\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}.$$

Diese drei Gleichungen addiert, folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+ \\ +\frac{\operatorname{cotang}\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}.$$

Ersetzt man ϱ wieder durch seinen Wert, so wird die vorgelegte Gleichung

$$r\frac{\partial^2 (ur)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}=0.$$

(Ueber die Transformation dieser Gleichung sehe man Jacobi: Ueber eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$; Crelle's Journal Bd. 36, pag. 113—134.)

16) Es soll der Ausdruck

$$\frac{y-x}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}}$$

mittelst der Gleichungen

$$u = l\sqrt{x^2+y^2},\quad v = \text{arc tang}\, z,\quad t = x+y+z$$

umgeformt werden, wenn u als abhängige, v und t als unabhängige Variable betrachtet werden.

Man erhält

$$e^{2u}\left(\cos^2 v\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

§ 15. Homogene Funktionen.

Eine Funktion $u = f(x, y, z, t, \ldots)$ der Veränderlichen $x, y, z, t, \ldots$ heisst **homogen** von der $n$ten Dimension oder von der $n$ten Ordnung, wenn sie die durch folgende Gleichung

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t, \ldots) = \alpha^n f(x, y, z, t, \ldots),$$

in welcher α eine neue Variable bezeichnet, ausgedrückte Eigenschaft besitzt.

Differentiiert man diese Gleichung in Bezug auf α und setzt nach ausgeführter Differentiation $\alpha = 1$, so erhält man folgende Euler'schen Sätze:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots = nu$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\ldots = n(n-1)u.$$

Es ist eine nützliche Übung, die Richtigkeit dieser Sätze an einigen Beispielen durch wirkliche Ausführung der Differentiationen nachzuweisen.

1) $$u = \frac{x^2+y^2}{y-x}.\ (n=1)$$

2) $$u = \text{arc tang}\frac{x+y}{x-y}.\ (n=0)$$

3) $$u = \left[l\,\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}\right]^8.\ (n=0)$$

4) Bezeichnet $w = f(x, y, z)$ eine homogene Funktion der Veränderlichen x, y, z und $\omega = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ diejenige Funktion, welche aus f hervorgeht, indem man für x, y, z ganze lineare Funktionen der Veränderlichen ξ, η, ζ einsetzt, so ist zu beweisen, dass

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

wenn x_1, y_1, z_1 diejenigen Werte der Variablen x, y, z bezeichnen, welche den Werten ξ_1, η_1, ζ_1 der Variablen ξ, η, ζ entsprechen.

Kapitel V.

Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz.

§ 16. Lehrsätze.

I. Die Taylor'sche Reihe.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n.$$

II. Die allgemeine Maclaurin'sche Reihe.

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) +$$
$$+ \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

wo a eine Konstante bedeutet.

Wird hierin $a = 0$ gesetzt, so entsteht:

III. Die spezielle Maclaurin'sche Reihe.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots +$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

In Bezug auf alle diese Reihen legen wir die Voraussetzung zu Grunde, dass die Funktion $f(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen in dem betrachteten Intervalle endlich, stetig und eindeutig sei.

Wenn $f(x)$ eine ganze, rationale Funktion von x bezeichnet, so brechen die drei Reihen bei einem gewissen Gliede ab. In allen anderen Fällen muss der Summe der n ersten Glieder, sofern man

eine dieser Reihen mit dem n ten Gliede abbrechen will, noch ein sogenanntes Restglied zugefügt werden, welches in den obigen Gleichungen mit R_n bezeichnet worden ist. Die Schätzung der Grösse dieses Restgliedes erlaubt ein Urteil über den Grad der Annäherung, mit welcher die Summe der ersten n Glieder der Reihe den Funktionswert darstellt.

Besitzt dieses Restglied die Eigenschaft, unendlich klein zu werden, wenn n unendlich gross wird, so stellt für jeden zulässigen Wert von x die Summe der in's Unendliche fortgeführten Reihe den Wert der entwickelten Funktion genau dar.

Von den verschiedenen Formen, unter welchen das Restglied dargestellt werden kann, sind die wichtigsten folgende:

Restglied der Taylor'schen Reihe.

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h),$$

$$R_n = \frac{h^n (1 - \vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta' h).$$

Restglied der allgemeinen Maclaurin'schen Reihe.

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}[a + \vartheta (x - a)],$$

$$R_n = \frac{(x-a)^n (1 - \vartheta')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}[a + \vartheta' (x - a)].$$

Die in diesen Formeln auftretenden Grössen ϑ und ϑ' bezeichnen nicht näher bekannte, positive, echte Brüche. Die erste Form des Restes wird gewöhnlich auf Lagrange zurückgeführt; die zweite rührt von Cauchy her.

IV. Die Taylor'sche Reihe für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k^3\right) + \dots$$

V. Die Maclaurin'sche Reihe für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}.(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b}.(y-b)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,b}.(x-a)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{a,b}.(x-a)(y-b) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a,b}.(y-b)^2\right] + \ldots$$

wo a und b Konstanten bezeichnen.

Die Restglieder, welche zu diesen Reihen hinzuzufügen sind, sind den vorhin angegebenen ganz analog.

Allgemein ist

$$\text{VI.}\quad f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3, \ldots) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots) +$$
$$+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\text{symb.}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + \ldots\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\text{symb.}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + \ldots\right)^{n-1} + R_n$$

Die symbolischen Klammern sollen zunächst nach dem polynomischen Lehrsatz auf gewöhnliche Weise entwickelt werden, dann soll aber für die $k$te Potenz einer Derivierten von f die entsprechende $k$te Derivierte substituiert werden.

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[\text{symb.}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + \ldots\right)^n\right]_{\substack{x_1+\vartheta h_1\\ x_2+\vartheta h_2\\ x_3+\vartheta h_3\\ \cdots\cdots}}$$

Oder

$$R_n = \frac{(1-\vartheta')^{n-1}}{(n-1)!}\left[\text{symb.}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}h_3 + \ldots\right)^n\right]_{\substack{x_1+\vartheta' h_1\\ x_2+\vartheta' h_2\\ x_3+\vartheta' h_3\\ \cdots\cdots}}$$

Die Maclaurin'sche Reihe und ihr Restglied erhält man, indem man in VI $x_k + h_k$ durch x_k, h_k durch $x_k - a_k$, $x_k + \vartheta h_k$ durch $a_k + \vartheta_k (x_k - a_k)$ ersetzt und bei jeder Ableitung den Index $a_1, a_2 \ldots$ hinzufügt.

§ 17. Beispiele.

1) Sei $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 3$.

α) Man bilde $f(x+h)$ mit Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes,

β) ordne $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-1)$ mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes,

γ) ordne $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x+1)$.

α) $f(x+h) = x^4 + 2x^3 - 5x + 3 + (4x^3 + 6x^2 - 5) \,.\, h +$
$+ (6x^2 + 6x) \,.\, h^2 + (4x + 2) \,.\, h^3 + h^4$,

β) $f(x) = 1 + 5(x-1) + 12(x-1)^2 + 6(x-1)^3 +$
$+ (x-1)^4$,

γ) $f(x) = 7 - 3(x+1) - 2(x+1)^3 + (x+1)^4$.

2) $(x+h)^m$ zu entwickeln, wenn m eine beliebige Zahl bedeutet.

Bezeichnet man x^m mit $f(x)$, so ist

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$$

und daher

$$(x+h)^m = x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \binom{m}{2} x^{m-2} h^2 + \binom{m}{3} x^{m-3} h^3 + \ldots +$$
$$+ \binom{m}{n-1} x^{m-n+1} h^{n-1} + \binom{m}{n} (x + \vartheta h)^{m-n} h^n.$$

Die Reihe ist konvergent, wenn h, absolut genommen, kleiner als x ist.

Setzt man $x = 1$ und x an die Stelle von h, so ist

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n-1} x^{n-1} +$$
$$+ \binom{m}{n} (1 + \vartheta x)^{m-n} x^n.$$

Die Reihe konvergiert für $-1 < x < +1$, für $x = +1$, wenn $-1 < m < +\infty$ und für $x = -1$, wenn $m > 0$.

Anmerkung. Zur Beurteilung der Grösse des Restgliedes für diese Reihe ist für positive Werte von x die Lagrange'sche, für negative Werte von x hingegen die Cauchy'sche Form des Restgliedes

$$R_n = n \,.\, \binom{m}{n} x^n (1 + \vartheta' x)^{m-n} (1 - \vartheta')^{n-1}$$

geeignet. Die Fälle $x = \pm 1$ bedürfen einer besonderen Untersuchung. Sie können leicht z. B. durch Anwendung des Gauss'schen

Konvergenzkriteriums erledigt werden. (Gauss, Disquisitiones gen. circa seriem inf. $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \ldots$). Man sehe auch Abel: Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots$, Crelle's Journal Bd. I, S. 311.

$$3)\quad l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3 - \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{h}{x}\right)^{n-1} - \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{h}{x+\vartheta h}\right)^n$$

(h abs. $< x$).

Wird $x = 1$ und x an Stelle von h gesetzt, so erhält man hieraus

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n$$

$(-1 < x \leqq 1)$.

Anmerkung. Für negative Werte von x kann zur Beurteilung der Grösse des Restgliedes wieder die Cauchy'sche Form für das Restglied

$$R_n = (-1)^{n-1} \frac{(1-\vartheta')^{n-1} x^n}{(1+\vartheta' x)^n}$$

dienen.

Ebenso ist

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$(-1 \leqq x < 1)$.

Zusatz 1. $l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$.

Zusatz 2. Setzt man in der letzten Formel $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+h}{y}$, also $x = \frac{h}{2y+h}$, so folgt

$$l(y+h) = ly + 2\left[\frac{h}{2y+h} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2y+h}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2y+h}\right)^5 + \ldots\right],$$

eine Formel, welche aus dem Logarithmus einer Zahl y den Logarithmus von $(y+h)$, wo h positiv oder negativ sein kann, zu berechnen lehrt.

4) Man lasse in

$$f(x)=\frac{a+x}{a-x}$$

x in $x+h$ übergehen und ordne $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h.

Da $$f'(x)=\frac{2a}{(a-x)^2},$$

so ist nach Aufgabe 10, § 6

$$f^{(n)}(x)=\frac{2.2.3.4\ldots n}{(a-x)^{n+1}}a$$

und daher

$$\frac{a+x+h}{a-x-h}=\frac{a+x}{a-x}+$$
$$+2a\left\{\frac{h}{(a-x)^2}+\frac{h^2}{(a-x)^3}+\frac{h^3}{(a-x)^4}+\ldots+\frac{h^n}{[a-(x+\vartheta h)]^{n+1}}\right\}.$$

5) Sei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es soll unter der Voraussetzung, dass x^2 nicht gleich 1 ist, $f(x+h)=\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}}$ nach Potenzen von h entwickelt werden.

Mit Hülfe von Aufgabe 23, § 6 erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{h}{1}+\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{3(3+24x^2+8x^4)}{(1-x^2)^4}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4}+\ldots\right].$$

6) $\sin(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

$$\sin(x+h)=\sin x+\frac{\cos x}{1!}h-\frac{\sin x}{2!}h^2-\frac{\cos x}{3!}h^3+$$
$$+\frac{\sin x}{4!}h^4+\ldots+\frac{\sin\left(x+\vartheta h+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}h^n.$$

7) $\cos(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{\sin x}{1!}h - \frac{\cos x}{2!}h^2 + \frac{\sin x}{3!}h^3 + $$
$$+ \frac{\cos x}{4!}h^4 - \ldots + \frac{\cos\left(x + \vartheta h + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}h^n.$$

8) arc tang $(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

Nach Aufgabe 44, § 6 ist

$$\frac{d^n \operatorname{arc\,tang} x}{d x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\varphi \sin n\varphi, \text{ wenn } x = \operatorname{cotang}\varphi,$$

und man erhält

$$\operatorname{arc\,tang}(x+h) = \operatorname{arc\,tang} x + \sin^2\varphi \,.\, h - \sin^2\varphi \sin 2\varphi \,.\, \frac{h^2}{2} +$$
$$+ \sin^3\varphi \sin 3\varphi \,.\, \frac{h^3}{3} - \sin^4\varphi \sin 4\varphi \,.\, \frac{h^4}{4} + \cdots$$

9) arc cotang $(x+h)$ nach Potenzen von h zu entwickeln.

Die Lösung kann auf ähnliche Weise wie die der vorhergehenden Aufgabe erhalten werden. Sie geht aber auch aus dem soeben erhaltenen Resultate hervor durch die Substitutionen

$$\operatorname{arc\,tang}(x+h) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotang}(x+h),$$
$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotang} x = \frac{\pi}{2} - y,$$
$$\varphi = \operatorname{arc\,cotang} x = y.$$

Es folgt

$$\operatorname{arc\,cotang}(x+h) = y - \sin^2 y \,.\, \frac{h}{1} + \sin^2 y \sin 2y \,.\, \frac{h^2}{2} -$$
$$- \sin^3 y \sin 3y \,.\, \frac{h^3}{3} + \cdots$$

10) Es bezeichne $y = f(x)$ denjenigen Bogen, dessen trigonometrische Tangente den natürlichen Logarithmus x besitzt; man entwickle $f(x+h)$ nach Potenzen von h.

Die Gleichung $x = l \operatorname{tang} y$ liefert ohne Schwierigkeit die sukzessiven nach x genommenen Ableitungen von y. Es wird

$$f(x+h)=y+\sin 2y\,.\frac{h}{1}+\sin 2y\cos 2y\,.\frac{h^2}{1.2}+\sin 2y\cos 4y\,.\frac{h^3}{3\,!}+$$
$$+\sin 2y\,(\cos 6y-\sin 2y\sin 4y)\,.\frac{h^4}{4\,!}+\ldots$$

11) a^x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Mit Hülfe des Maclaurin'schen Lehrsatzes erhält man, wenn $f(x)=a^x$ gesetzt wird, wonach

$$f'(0)=l\,a,\ f''(0)=(l\,a)^2, \ldots f^{(n)}(0)=(l\,a)^n,$$
$$a^x=1+\frac{x}{1\,!}la+\frac{x^2\,(l\,a)^2}{2\,!}+\frac{x^3\,(l\,a)^3}{3\,!}+\ldots+\frac{x^{n-1}\,(l\,a)^{n-1}}{(n-1)\,!}+\frac{x^n\,(l\,a)^n}{n\,!}\,a^{\vartheta x}.$$

Die Reihe konvergiert für jeden endlichen Wert von x und a.

Zusatz 1. $e^x=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\ldots\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}+\frac{x^n}{n\,!}e^{\vartheta x}$

$$e^1=1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots=2{,}718281828459\ldots$$
$$e^{-1}=1-\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}-\frac{1}{3\,!}+\ldots=0{,}367879441171\ldots$$

Zusatz 2. Setzt man $e^x=z$, so wird $x=l\,z$, also

$$z=1+\frac{l\,z}{1\,!}+\frac{(l\,z)^2}{2\,!}+\frac{(l\,z)^3}{3\,!}+\frac{(l\,z)^4}{4\,!}+\ldots$$

12) $\sin x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\frac{x^7}{7\,!}+\ldots+\frac{x^n}{n\,!}\sin\left(\vartheta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

$$\sin 1^0=\sin 0{,}0174533=0{,}0174533-0{,}0000009=0{,}0174524.$$

13) $\cos x$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\frac{x^6}{6\,!}+\ldots+\frac{x^n}{n\,!}\cos\left(\vartheta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

$$\cos 1^0=1-0{,}0001523=0{,}9998477.$$

Anmerkung. Setzt man in den Beispielen 6) und 7) die Reihen bis ins Unendliche fort und fasst die Glieder zusammen, welche mit $\cos x$, beziehungsweise mit $\sin x$ multipliziert sind, so erhält man die bekannten Formeln

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin \text{h},$$
$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h.$$

14) $l \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$l \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = l \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{1!}x - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3!}x^3 - \frac{80}{4!}x^4 + \ldots$$

$\log \sin(30^0 + 10'') - \log \sin 30^0 =$

$$= 0{,}43429448\,(1{,}7320508 \,.\, 0{,}00004848) = 0{,}0000365.$$

Man vergleiche die betreffende Differenz in den Logarithmentafeln.

15) arc sin x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Nach Aufgabe 4, § 7 ist

$$f^{(2n+1)}(0) = 1 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \ldots (2n-1)^2,$$
$$f^{(2n)}(0) = 0;$$

folglich

$$\text{arc sin} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \,.\, 3^2}{5!}x^5 + \frac{1 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2}{7!}x^7 + \ldots$$
$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Zusatz. Setzt man arc sin $x = z$, so ist

$$z = \sin z + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{\sin^5 z}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{\sin^7 z}{7} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3 \,.\, 2^3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{1}{5 \,.\, 2^5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{1}{7 \,.\, 2^7} + \ldots = 0{,}523599.$$

16) arc cos x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Auf analoge Weise, wie in der vorigen Aufgabe, oder auch durch die Substitution von arc cos $x = \frac{\pi}{2} -$ arc sin x in das soeben erhaltene Resultat folgt

$$\text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{x^5}{5} - \ldots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Zusatz. Setzt man arc cos $x = z$, so ist

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{1} - \frac{1}{2}\frac{\cos^3 z}{3} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{\cos^5 z}{5} - \ldots$$

17) arc tang x zu entwickeln.

Da nach Aufgabe 3, § 7

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n . 1 . 2 . 3 \ldots (2n),$$
$$f^{(2n)}(0) = 0,$$

so erhält man

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$(-1 < x < +1).$$

Um das Lagrange'sche Restglied zu erhalten, erinnere man sich, dass (Aufgabe 44, § 6)

$$\frac{d^n \,\text{arc tang}\, x}{d x^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sin^n \varphi \sin n \varphi,$$

wo

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, x, \quad \text{also} \quad \sin^n \varphi = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Daher lautet das Restglied

$$\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\vartheta^2 x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, \vartheta x\right),$$

und man erkennt leicht, dass obige Reihe konvergiert und ihre Summe mit arc tang x übereinstimmt für jedes x, das, absolut genommen, kleiner als 1 ist.

Ist arc tang $x = z$, so wird

$$z = \frac{\text{tang}\, z}{1} - \frac{\text{tang}^3 z}{3} + \frac{\text{tang}^5 z}{5} - \ldots \quad \text{(Leibniz'sche Reihe).}$$

Zusatz. Für tang $z = 1$ ist $z = \frac{\pi}{4}$, also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots$$
$$= 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right)$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} \ldots\right).$$

Zur Berechnung von π eignen sich diese Reihen aber nicht;*) bessere Formeln erhält man durch:

$$\frac{\pi}{2} = \text{arc tang}\,\tfrac{1}{2} + \text{arc tang}\,\tfrac{1}{3}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\tfrac{1}{2} + \text{arc tang}\,\tfrac{1}{5} + \text{arc tang}\,\tfrac{1}{8}.^{**)}$$

18) tang x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es sei tang $x = \varphi(x)$, alsdann ist:

$$\varphi'(x) = \sec^2 x = 1 + \text{tang}^2 x + [\varphi(x)[^2;$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi''(x) = \varphi(x)\,\varphi'(x);$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi'''(x) = [\varphi'(x)]^2 + \varphi(x)\,\varphi''(x);$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{IV}(x) = 3\,\varphi''(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,\varphi'''(x);$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(x) = \varphi^{(n)}(x)\,\varphi'(x) + \binom{n}{1}\varphi^{(n-1)}(x)\,\varphi''(x) +$$

$$+ \binom{n}{2}\varphi^{(n-2)}(x)\,\varphi'''(x) + \ldots + \binom{n}{3}\varphi'''(x)\,\varphi^{(n-2)}(x) +$$

$$+ \binom{n}{2}\varphi''(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) + \binom{n}{1}\varphi'(x)\,\varphi^{(n)}(x) + \varphi(x)\,\varphi^{(n+1)}(x).$$

Nun ist

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{VI}(0) = \ldots = \varphi^{(2p)}(0) = 0;$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(0) = \varphi^{(n)}(0)\,\varphi'(0) + \binom{n}{2}\varphi^{(n-2)}(0)\,\varphi'''(0) +$$

$$+ \binom{n}{4}\varphi^{(n-4)}(0)\,\varphi^{V}(0) + \binom{n}{6}\varphi^{(n-6)}(0)\,\varphi^{VII}(0) + \ldots$$

Beachtet man, dass n, $n-2$ etc. nur ungerade sein können, so sieht man, dass $\varphi^{(k)}(0)\,\varphi^{(l)}(0)$ noch einmal auftreten muss, ausser, wenn $k = l$ wird. Fasst man die gleich hohen Ableitungen zusammen, so ergibt sich unter Benutzung der bekannten Relation:

$$\binom{n}{2k} + \binom{n}{n-2k-1} = \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1} = \binom{n+1}{2k+1}:$$

*) Nach **Euler** müsste man nicht weniger als 10^{50} Glieder berechnen, um π auf 100 Stellen genau zu erhalten.

) Durch diese letztere Formel ist die Zahl π durch **Dahse in Zeit von 2 Monaten auf 200 Dezimalstellen berechnet worden, **Richter** berechnete sie auf 500, **Shanks** nach einander auf 440, 607 und 707 Stellen, Proc. of the Royal Society, Bd. 21, 1873.

wenn $\frac{n+1}{2}$ gerade ist:

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(0) = \sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{4}} \binom{n+1}{2k+1} \varphi^{(n-2k)}(0)\, \varphi^{(2k+1)}(0);$$

wenn $\frac{n+1}{2}$ ungerade ist:

$$\tfrac{1}{2}\varphi^{(n+2)}(0) = \sum_{k=0}^{k=\frac{n-5}{4}} \binom{n+1}{2k+1} \varphi^{(n-2k)}(0)\, \varphi^{(2k+1)}(0) +$$

$$+ \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \left[\varphi^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(0)\right]^2$$

$\varphi'(0) = 1$; $\varphi'''(0) = 2$; $\varphi^{V}(0) = 16 = 2^4$; $\varphi^{VII}(0) = 2^4 . 17$; $\varphi^{IX}(0) = 2^8 . 31$; $\varphi^{XI}(0) = 2^9 . 691$; $\varphi^{XIII}(0) = 2^{12} . 5461$.

Es ist also:

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 + \frac{2^4.17}{7!}x^7 + \frac{2^8.31}{9!}x^9 +$$

$$+ \frac{2^9.691}{11!}x^{11} + \frac{2^{12}.5461}{13!}x^{13} + \ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} +$$

$$+ \frac{21844}{6081075}x^{13} + \ldots$$

Allgemein ist

$$\operatorname{tang} x = \frac{B_1 . 2^2 . (2^2-1)}{2!}x + \frac{B_3 . 2^4 (2^4-1)}{4!}x^3 +$$

$$+ \frac{B^5 . 2^6 (2^6-1)}{6!}x^5 + \ldots,$$

worin die Koeffizienten B die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen sind, und zwar ist

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, $B_7 = \frac{1}{30}$, $B_9 = \frac{5}{66}$, $B_{11} = \frac{691}{2730}$,
$B_{13} = \frac{7}{6}$, $B_{15} = \frac{3617}{510}$ etc.

Diese Zahlen befolgen kein einfaches Bildungsgesetz. Durch andere Betrachtungen kann man nachweisen, dass die Reihe für

tang x nur dann konvergent ist, wenn der absolute Betrag von x kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$.

Beispiel:

$$\operatorname{tang} 18^0 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{10}\pi = 0{,}314159265 + 0{,}010335426 + \\ + 0{,}000408026 + 0{,}000016300 + 0{,}000000652 + \\ + 0{,}000000026 + 0{,}000000001 = 0{,}324919696.$$

19) sec x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es sei $\sec x = f(x)$.

$$f'(x) = f(x) \,.\, \operatorname{tang} x = f(x)\,\varphi(x);$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)\,\varphi(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)\,\varphi'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)\,\varphi''(x) + \\ + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x)\,\varphi'''(x) + \binom{n}{4} f^{(n-4)}(x)\,\varphi^{IV}(x) + \ldots$$

Nun ist nach Aufgabe 18

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{IV}(0) \ldots = 0,$$

daher

$$f^{(n+1)}(0) = \binom{n}{1} f^{(n-1)}(0)\,\varphi'(0) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(0)\,\varphi'''(0) + \\ + \binom{n}{5} f^{(n-5)}(0)\,\varphi^{V}(0) + \binom{n}{7} f^{(n-7)}(0)\,\varphi^{VII}(0) + \ldots$$

$$f'(0) = f'''(0) = f^{V}(0) = f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

$$f(0) = 1;\ f''(0) = 1;\ f^{IV}(0) = 5;\ f^{VI}(0) = 61;\ f^{VIII}(0) = 1385;$$
$$f^{X}(0) = 50521;\ f^{XII}(0) = 2702765.$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 + \frac{50521}{10!}x^{10} + \\ + \frac{2702765}{12!}x^{12} + \ldots$$

Die Bedingungen der Konvergenz dieser Reihe sind dieselben, wie bei tang x.

Beispiel:

$$\sec 18^0 = 1 + 0{,}049348022 + 0{,}002029357 + 0{,}000081451 + \\ + 0{,}000003529 + 0{,}000000130 + 0{,}000000005 = 1{,}051462224.$$

20) cotang x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Man entwickle zunächst x cotang x nach Aufgabe 6, § 7, wodurch man erhält

$$x \operatorname{cotang} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \dots$$

Darnach wird

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93555} - \dots$$

Allgemein ist

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x} - B_1\, 2^2 \frac{x}{2!} - B_3\, 2^4 \frac{x^3}{4!} - B_5\, 2^6 \frac{x^5}{6} - \dots$$

Die Konvergenz dieser Reihe erstreckt sich von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$, die Grenzen exklusive.

Anmerkung. Aus der Reihe für $\operatorname{cotang} x$ lässt sich diejenige für $\operatorname{tang} x$ leicht ableiten mittelst der Beziehung $2 \operatorname{cotang} 2x = \operatorname{cotang} x - \operatorname{tang} x$.

21) $l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

$$l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = l \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \frac{2^1}{1}x + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{5 \cdot 2^5}{5!}x^5 + \\ + \frac{61 \cdot 2^7}{7!}x^7 + \frac{1385 \cdot 2^9}{9!}x^9 + \dots$$

$$\log \operatorname{tang}(45^0 + 10'') - \log \operatorname{tang} 45^0 = 0{,}43429448 \,.\, 2 \,.\, 0{,}00004848 = \\ = 0{,}0000421.$$

Man vergleiche die betreffende Stelle in den Logarithmentafeln.

22a) $e^{\sin x}$ zu entwickeln.

Unter Berücksichtigung der in Aufgabe 2, § 7 enthaltenen Werte folgt:

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 - \frac{3}{6!}x^6 + \frac{56}{7!}x^7 + \frac{217}{8!}x^8 + \\ + \frac{64}{9!}x^9 - \frac{2951}{10!}x^{10} - \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 11}{11!}x^{11} \dots$$

22b) $e^{\operatorname{tang} x}$ zu entwickeln.

Es sei

$$e^{\operatorname{tang} x} = F(x), \quad \operatorname{tang} x = \varphi(x),$$

mithin

$$F'(x) = F(x)\, \varphi'(x).$$

Differentiiert man diese Gleichung p mal nach einander nach dem Leibniz'schen Satze und berücksichtigt die aus Aufgabe 18 bekannten Werte der Ableitungen von $\varphi(x)$, so erhält man leicht eine Rekursionsformel für $F^{(n+1)}(0)$. Es wird

$$e^{\operatorname{tang} x} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \frac{37}{5!}x^5 + \frac{177}{6!}x^6 + \\ + \frac{959}{7!}x^7 + \frac{6097}{8!}x^8 + \frac{41641}{9!}x^9 + \cdots$$

23) Aufgabe. Es sollen Formeln für $\sin nz$ und $\cos nz$ aufgefunden werden.

Setzt man $\varphi(x) = \sin(n \arcsin x) = \sin nz$ und bildet nach Aufgabe 7, § 7 die sukzessiven Ableitungen von $\varphi(x)$ für den speziellen Wert $x = 0$, so liefert der Maclaurin'sche Lehrsatz

$$\sin nz = \frac{n \sin z}{1!} - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 z + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 z - \cdots$$

Durch Differentiation erhält man

$$\cos nz = \cos z\left(1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 z + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 z - \cdots\right).$$

Diese beiden Reihen brechen ab, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Beispiel: $\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$,
$\sin 5z = 5\sin z - 20\sin^3 z + 16\sin^5 z$,
$\sin 7z = 7\sin z - 56\sin^3 z + 112\sin^5 z - 64\sin^7 z$;
$\cos 3z = \cos z(1 - 4\sin^2 z)$,
$\cos 5z = \cos z(1 - 12\sin^2 z + 16\sin^4 z)$,
$\cos 7z = \cos z(1 - 24\sin^2 z + 80\sin^4 z - 64\sin^6 z)$.

Nimmt man $f(x) = \cos(n \arcsin x)$ (Aufgabe 8, § 7), so findet man ganz in derselben Weise wie oben

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2 z + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 z - \cdots,$$

$$\sin nz = \cos z\left(n \sin z - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 z + \cdots\right).$$

Ist n eine gerade Zahl, so brechen beide Reihen ab.

Beispiel: $\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z$,
$\cos 4z = 1 - 8\sin^2 z + 8\sin^4 z$,
$\cos 6z = 1 - 18\sin^2 z + 48\sin^4 z - 32\sin^6 z$;

$$\sin 2z = \cos z \,.\, 2 \sin z,$$
$$\sin 4z = \cos z\,(4 \sin z - 8 \sin^3 z),$$
$$\sin 6z = \cos z\,(6 \sin z - 32 \sin^3 z + 32 \sin^5 z).$$

Setzt man $f(x) = \cos(n \arccos x)$ (Aufgabe 9, § 7), so ist für ein ungerades n:

$$\cos nz =$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(n \cos z - \frac{n(n^2-1^2)}{3!} \cos^3 z + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} \cos^5 z - \ldots\right).$$

Hieraus

$$\sin nz =$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin z \left(1 - \frac{n^2-1^2}{2!} \cos^2 z + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!} \cos^4 z - \ldots\right).$$

Für ein gerades n ist:

$$\cos nz =$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{n^2 \cos^2 z}{2!} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!} \cos^4 z - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!} \cos^6 z + \ldots\right),$$

$$\sin nz =$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \sin z \left(-n \cos z + \frac{n(n^2-2^2)}{3!} \cos^3 z - \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \cos^5 z + \ldots\right).$$

Es ist also:

$$\cos 3z = -3 \cos z + 4 \cos^3 z,$$
$$\cos 5z = 5 \cos z - 20 \cos^3 z + 16 \cos^5 z,$$
$$\cos 7z = -7 \cos z + 56 \cos^3 z - 112 \cos^5 z + 64 \cos^7 z;$$
$$\sin 3z = -\sin z + 4 \sin z \cos^2 z,$$
$$\sin 5z = \sin z - 12 \sin z \cos^2 z + 16 \sin z \cos^4 z,$$
$$\sin 7z = -\sin z + 24 \sin z \cos^2 z - 80 \sin z \cos^4 z + 64 \sin z \cos^6 z;$$
$$\cos 2z = -1 + 2 \cos^2 z,$$
$$\cos 4z = 1 - 8 \cos^2 z + 8 \cos^4 z,$$
$$\cos 6z = -1 + 18 \cos^2 z - 48 \cos^4 z + 32 \cos^6 z;$$
$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$
$$\sin 4z = -4 \sin z \cos z + 8 \sin z \cos^3 z,$$
$$\sin 6z = 6 \sin z \cos z - 32 \sin z \cos^3 z + 32 \sin z \cos^5 z.$$

24) $(x+h)^m (y+k)^n = F(x+h, y+k)$ soll nach Potenzen von h und k entwickelt werden.

$$(x+h)^m (y+k)^n = x^m y^n + m x^{m-1} y^n h + n x^m y^{n-1} k +$$
$$+ \binom{m}{2} x^{m-2} y^n h^2 + m n x^{m-1} y^{n-1} h k + \binom{n}{2} x^m y^{n-2} k^2 +$$
$$+ \binom{m}{3} x^{m-3} y^n h^3 + n \binom{m}{2} x^{m-2} y^{n-1} h^2 k +$$
$$+ m \binom{n}{2} x^{m-1} y^{n-2} h k^2 + \binom{n}{3} x^m y^{n-3} k^3 + \ldots$$

25) $(x+h)\, l(y+k) = \varphi(x+h,\ y+k)$ nach Potenzen von h und k zu entwickeln.

Auflösung:

$$(x+h)\, l(y+k) = x\, l\, y + \left[l\, y\, h + \frac{x}{y} k\right] + \frac{1}{2\,!}\left[2\frac{1}{y} h\, k - \frac{x}{y^2} k^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{3\,!}\left[-3\frac{1}{y^2} h\, k^2 + \frac{2x}{y^3} k^3\right] + \frac{1}{4}\left[4\frac{2\,!}{y^3} h\, k^3 - \frac{3\,!\, x}{y^4} k^4\right] +$$
$$+ \frac{1}{5\,!}\left[-5\frac{3\,!}{y^4} h\, k^4 + \frac{4\,!\, x}{y^5} k^5\right] + \frac{1}{6\,!}\left[6\frac{4\,!}{y^4} h\, k^5 - \frac{5\,!}{y^5} k^6\right] + \ldots$$

$$(x+h)\, l(y+k) = x\, l\, y + \frac{1}{y}[y\, l\, y\, h + x\, k] + \frac{k}{y^2}[y\, h - \tfrac{1}{2} x\, k] -$$
$$- \frac{k^2}{y^3}[\tfrac{1}{2} y\, h - \tfrac{1}{3} x\, k] + \frac{k^3}{y^4}[\tfrac{1}{3} y\, h - \tfrac{1}{4} x\, k] - \frac{k^4}{y^5}[\tfrac{1}{4} y\, h - \tfrac{1}{5} x\, k] + \ldots$$

$$(x+h)\, l(y+k) = x\, l\, y + \frac{1}{y}[y\, l\, y\, h + x\, k] +$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1} \frac{k^p}{y^{p+1}}\left[\frac{1}{p} y\, h - \frac{1}{p+1} x\, k\right].$$

26) $\sin(x+y)$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

Sowohl die Substitution von $x+y$ an Stelle von x in der Reihe für $\sin x$, als auch die Anwendung des Maclaurin'schen Lehrsatzes für Funktionen zweier Veränderlichen liefert

$$\sin(x+y) = \frac{x+y}{1} - \frac{(x+y)^3}{3\,!} + \frac{(x+y)^5}{5\,!} - \ldots$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{1}(x+y) - \frac{1}{3\,!}(x^3 + 3x^2 y + 3 x y^2 + y^3) +$$
$$+ \frac{1}{5\,!}(x^5 + 5x^4 y + 10 x^3 y^2 + 10 x^2 y^3 + 5 x y^4 + y^5) + \ldots$$

27) $\sin x . \sin y$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

$$\sin x . \sin y = \frac{1}{2!} 2xy - \frac{1}{4!}[4x^3y + 4xy^3] + \\ + \frac{1}{6!}[6x^5y + 20x^3y^3 + 6xy^5] - \\ - \frac{1}{8!}[8x^7y + 56x^5y^3 + 56x^3y^5 + 8xy^7] + \ldots$$

$$\sin x . \sin y = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} \sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{2p}{2r+1} x^{2p-2r-1}\, y^{2r+1}.$$

Es ist also, wenn $y = x$ gesetzt wird,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{6!}(2x)^6 + \ldots$$

Diese letztere Reihe lässt sich auch aus der Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ und der Reihe für $\cos 2x$ ableiten.

28) $\cos x \cos y$ nach Potenzen von x und y zu entwickeln.

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2!}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4!}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) - \\ - \frac{1}{6!}(x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6) + \\ + \frac{1}{8!}(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6 + y^8) - \ldots$$

$$\cos x \cos y = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \sum_{r=0}^{r=p} \binom{2p}{2r} x^{2p-2r}\, y^{2r}.$$

29) $\operatorname{arc\,tang} \frac{x+h}{y+k}$ soll nach Potenzen von h und k entwickelt werden.

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{x+h}{y+k} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + \frac{1}{1!}\left[\frac{y}{x^2+y^2} h - \frac{x}{x^2+y^2} k\right] + \\ + \frac{1}{2!}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} h^2 + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} hk + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} k^2\right] + \ldots$$

30) Es sollen folgende Gleichungen mit besonderer Berücksichtigung derjenigen Methoden, welche sich auf den Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz stützen, näherungsweise gelöst werden:

α) $x^3+2x^2+3x+4=0$;
$x=-1{,}6506292$.

β) $x^4-2x^2+4x-8=0$;
$x=1{,}6117663$.

γ) $10\log x=x$;
$x=1{,}371288$.

δ) $\operatorname{tang} x+x=0$;
$x_1=116^0\ 14'\ 21''$,
$x_2=281^0\ 30'\ 16''$,
$x_3=457^0\ \ 8'\ 38''$,
etc.

Anleitung. Es sei $y=f(x)=0$ die zu lösende Gleichung. Bezeichnet x_0 einen durch Versuch gefundenen Näherungswert der Wurzel und x_0+h den wahren Wert derselben, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$0=f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1\,.\,2}+\cdots$$

Kommt nun x_0 dem wahren Wert der Wurzel so nahe, dass h^2 und die höheren Potenzen von h vernachlässigt werden dürfen, so hat man zur Berechnung der Korrektion h die Gleichung

$$0=f(x_0)+f'(x_0)\,h,$$

woraus

$$h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

x_0+h ist dann ein neuer Näherungswert.

Diese Methode, welche von Newton herrührt, kann geometrisch so interpretiert werden, dass man die Kurve $y=f(x)$ durch ihre Tangente ersetzt und den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Axe aufsucht, während der sogenannten Regula falsi

$$x=x_1-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\cdot y_1$$

oder

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{2},$$

wo x_1 und x_2 Näherungswerte, y_1 und y_2 die zugehörigen Resultate bezeichnen, die Annahme zu Grunde liegt, dass der zwischen zwei Punkten der Kurve liegende Kurvenbogen durch die Sehne ersetzt und der Schnittpunkt der Sehne mit der x-Axe aufgesucht wird.

Eine angemessene Verbindung der Newton'schen Methode mit der Regula falsi liefert zu gleicher Zeit zwei Grenzen, zwischen welchen die Wurzel enthalten sein muss. Hierbei hat man die Newton'sche Formel für denjenigen Näherungswert anzuwenden, für welchen $f(x)$ und $f''(x)$ dasselbe Zeichen besitzen.

Ein weiteres Mittel zur Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ liefert der Maclaurin'sche Lehrsatz, mit dessen Hülfe die Inversion der Funktion $f(x)$ erreicht werden kann.

Bezeichnet nämlich x_0, y_0 ein Wertepaar, welches der Gleichung $y = f(x)$ genügt, so gibt die Maclaurin'sche Reihe die Entwicklung

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \frac{y - y_0}{1} + \left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)_0 \frac{(y - y_0)^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3 x}{dy^3}\right)_0 \frac{(y - y_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Setzt man hierin $y = 0$ und für $\left(\frac{dx}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)$, ... ihre Werte, nämlich

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = \frac{1}{f'(x_0)},$$

$$\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)_0 = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3},$$

$$\left(\frac{d^3 x}{dy^3}\right)_0 = -\frac{f'(x_0) f'''(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5}, \text{ etc.}$$

so erhält man, x_0 als Näherungswert vorausgesetzt, für den neuen Näherungswert x die Gleichung

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^0} \frac{[f(x_0)]^2}{2} +$$

$$+ \frac{f'(x_0) f'''(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5} \cdot \frac{[f(x_0)]^3}{6} - \ldots$$

Vorausgesetzt wird bei allen diesen Näherungsmethoden, dass in dem betrachteten Intervalle $f'(x)$ weder sein Zeichen wechselt, noch gleich Null wird.

Kapitel VI.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des wahren Wertes einer Funktion, die für einen speziellen Wert der Veränderlichen in unbestimmter Form erscheint.

---

§ 18. Allgemeine Sätze und Regeln.

1) Bezeichnen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Funktionen von x, welche nebst ihren n ersten Ableitungen in demselben Intervalle endlich, stetig und eindeutig sind und welche nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen für den speziellen Wert $x = a$ verschwinden, während $\varphi^{(n)}(a)$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, so gilt für jeden innerhalb des Intervalles liegenden Wert von x der Satz

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}[a + \vartheta(x-a)]}{\varphi^{(n)}[a + \vartheta(x-a)]},$$

wo ϑ einen nicht näherbekannten, positiven, echten Bruch bedeutet.

In dieser Gleichung erscheint der Ausdruck auf der linken Seite für $x = a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und verliert daher seine bestimmte Bedeutung. Aus der obigen Gleichung folgt aber, dass für $\lim x = a$, $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$ ist. Diesen Wert nennt man den wahren Wert des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$.

Der wahre Wert des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x = a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, ist demnach gleich dem Werte von $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$, wenn die $n$ten Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ die ersten sind, welche für $x = a$ nicht zugleich verschwinden.

Dieser Satz gilt in dieser Form nur dann, wenn $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ bestimmte Werte haben; verlieren $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ für $x = a$ ihre Bedeutung oder werden beide unendlich gross, während

die übrigen Voraussetzungen bestehen bleiben, so tritt an die Stelle des vorigen Satzes der folgende: Der wahre Wert von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$, d. h. $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$, stimmt überein mit dem Grenzwerte des Quotienten $\frac{f^{(n)}(x')}{\varphi^{(n)}(x')}$ für $\lim x' = a$, vorausgesetzt, dass ein solcher Grenzwert existiert.

2) Der Fall, wo die Funktion $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, wenn man schreibt $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Der wahre Wert des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x = a$ unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint, ist gleich dem Werte von $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$, wenn die n ten Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ die ersten sind, welche für $x = a$ nicht zugleich unendlich gross werden.

Auch für diesen Fall gilt ein dem im letzten Teil von 1) ausgesprochenen ganz analoger Satz.

Zusatz. Derselbe Satz gilt für $a = \infty$.

3) Wenn $f(x) . \varphi(x) = 0 . \infty$ wird für $x = a$, so setze man $f(x) . \varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, wodurch man einen der beiden vorhergehenden Fälle erhält.

4) Die unbestimmte Form $\infty - \infty$, unter welcher die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ erscheinen kann, wird auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückgeführt, indem man $\frac{1}{f(x)} = f_1(x)$ und $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi_1(x)$ setzt, wodurch man erhält

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x) - f_1(x)}{f_1(x)\,\varphi_1(x)}.$$

5) Nimmt die Funktion $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0 oder 1^∞ an, so erscheint beim Übergang zur Exponentialfunktion, wonach $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \cdot l f(x)}$, der Exponent $\varphi(x) \cdot l f(x)$ unter einer der vorhergehenden unbestimmten Formen und kann demgemäss behandelt werden.

Wenn das allgemeine Verfahren mehrfache Differentiationen zur Bestimmung des wahren Wertes von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ erfordert, so ist es in vielen Fällen zweckmässig, Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von $(x - a)$ zu entwickeln. Da nach der Voraussetzung einige der Funktionen $f(a)$, $f'(a), \ldots$ und $\varphi(a)$, $\varphi'(a), \ldots$ verschwinden werden, so wird sich eine gewisse Potenz von $(x - a)$ als gemeinschaftlicher Faktor im Zähler und Nenner fortheben lassen; der übrig bleibende Bruch gibt für $x = a$ den gesuchten wahren Wert.

Falls eine Entwicklung des Zählers und Nenners eines Ausdrucks $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x = a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, nach Potenzen von $(x - a)$ mit nur ganzen Exponenten nicht möglich ist und in Folge dessen das allgemeine Verfahren nur mühsam oder auf Umwegen zum Ziele führt, kann der wahre Wert dieses Quotienten auf folgende Weise bestimmt werden: Man setze $(a + h)$ für x in die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ und entwickle sie nach steigenden Potenzen von h. Nach Hebung einer gewissen Potenz von h, welche hierbei im Zähler und Nenner von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ als gemeinsamer Faktor auftritt, ergibt sich der wahre Wert des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$, indem man in dem übrig bleibenden Bruche $h = 0$ setzt.

Die Bestimmung des wahren Wertes einer für $x = a$ unter unbestimmter Form erscheinenden Funktion kann häufig dadurch vereinfacht werden, dass man die gegebene Funktion durch Division von solchen Faktoren befreit, welche für $x = a$ weder gleich Null, noch unendlich gross werden. Das Produkt aus dem wahren Werte des übrig bleibenden Teiles in den bestimmten Wert der abgesonderten Faktoren liefert dann den wahren Wert der gegebenen Funktion.

§ 19. Beispiele.

Bei denjenigen Aufgaben, welche mit einem * bezeichnet sind, reicht eine einmalige Differentiation nicht hin.

1) $u = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{m}{n} a^{m-n}$.

2) $u = \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$; für $x = 1$ wird $u = \frac{0}{0} = 3$.

3) $u = \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5}$; für $x = 5$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{3}{29}$.

4) $u = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$; für $x = -1$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{5}{8}$.

5) $u = \frac{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{9}{32}}{x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}}$; für $x = -\frac{3}{4}$ wird $u = \frac{0}{0} = -\frac{120}{59}$.

6) $u = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$; $\begin{cases} \text{für } x = +2 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{3}{5}, \\ \text{für } x = -2 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{3}{5}. \end{cases}$

7) $u = \frac{x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}$; $\begin{cases} \text{für } x = +3 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = 10, \\ \text{für } x = -3 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

8) $u = \frac{x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18}{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}$; $\begin{cases} \text{für } x = 1 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{4}{5}, \\ \text{für } x = -2 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}, \\ \text{für } x = 3 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{6}{7}. \end{cases}$

9) $*u = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$; für $x = c$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{a}{b}$.

10) $*u = \frac{a^5 + a^4x - ax^4 - x^5}{a^4 + 2a^3x + 2a^2x^2 + 2ax^3 + x^4}$; für $x = -a$ wird $u = \frac{0}{0} = 2a$.

11) $u = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$; für $x = 2$ wird $u = \frac{0}{0} = 0$.

12) $u = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$, $\begin{cases} \text{für } x = -1 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \infty, \\ \text{für } x = +2 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}, \\ \text{für } x = -2 \text{ wird } u = \frac{0}{0} = -1. \end{cases}$

13) $u = \frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = -\infty$.

14) $u = \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{na^{n-1}}$.

15) $u=\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$; für $x=a$ wird $u=\frac{0}{0}=\sqrt{\frac{3}{8}}$.

16) $u=\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; für $x=a$ wird $u=\frac{0}{0}=a\sqrt{3}$.

Man dividiere mit dem Nenner in den Zähler und setze im Quotienten $x=a$.

17) $u=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; für $x=a$ wird $u=\frac{0}{0}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Setzt man $x=a+h$ und entwickelt Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von h, so folgt

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2ah+h^2}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{h}{a}}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a}\sqrt{1+\frac{h}{2a}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}-\ldots\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\ldots\right)}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{a}-\ldots}{\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\ldots\right)}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{2a}-\ldots}{\sqrt{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2a}-\ldots\right)},\ \text{woraus für } h=0,\ u=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

18) $*u=\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$;
für $x=a$ wird $u=\frac{0}{0}=-5a$.

19) $u=\frac{a^x-b^x}{x}$; für $x=0$ wird $u=\frac{0}{0}=l\frac{a}{b}$.

20) $u=\frac{a^x-b^x}{l(1-x)}$; für $x=0$ wird $u=\frac{0}{0}=l\frac{b}{a}$.

21) $u=\frac{a^n-x^n}{l(a^n)-l(x^n)}$; für $x=a$ wird $u=\frac{0}{0}=a^n$.

22) $u=\frac{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}{x^2}$; für $x=0$ wird $u=\frac{0}{0}=\frac{1}{2a^2}$.

23) $u=\frac{\sqrt{a^2-ax+x^2}-\sqrt{a^2+ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; für $x=0$ wird $u=\frac{0}{0}=\sqrt{a}$.

Anstatt vom Zähler und vom Nenner die Ableitung zu bilden, kann man auch jede einzelne Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickeln.

24) $u = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = 2a\sqrt{2a}$.

Dividiert man mit dem Nenner in den Zähler, so gibt der Quotient für $x = a$ unmittelbar den gesuchten wahren Wert.

25) $u = \frac{\alpha(x-a) + \beta\sqrt{x-a}}{\gamma(x-a)^2 + \delta\sqrt[3]{x-a}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = 0$.

Setzt man $\sqrt[6]{x-a} = t$, so folgt für $t = 0$ der gesuchte wahre Wert.

26) $u = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{16}{9}a$.

27) $u = \frac{(x-c)\sqrt{x-b} + \sqrt{x-c}}{\sqrt{2c} - \sqrt{x+c} + \sqrt{x-c}}$; für $x = c$ wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

28) $^*u = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$; für $x = 1$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Durch Division ergibt sich:

$$u = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n,$$

und für $x = 1$:

$$u = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

29) $u = \frac{a + \sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt[3]{x^3 - a^3} - \sqrt{x^2 - a^2}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} - 0$.

30) $u = \frac{\sqrt[3]{2a^3 - x^3} - \sqrt{5a^2 - 4x^2}}{x\sqrt[4]{8a^2x^2 + 8ax^3} - \sqrt[5]{20a^6x^4 + 12a^4x^6}}$;

für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{20}{9a}$.

31) $u = \frac{x - \sqrt[3]{32a^2x - 24ax^2} + \sqrt[6]{40a^3x^3 + 24a^2x^4} - \sqrt[3]{2x^3 - a^3}}{3a(9x - 10a) + \sqrt[4]{36a^3x + 45x^4}\sqrt[3]{2x^3 - a^3}}$;

für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{24a}$.

32) $^*u = \frac{x^x - x}{1 - x + lx}$; für $x = 1$ wird $u = \frac{0}{0} = -2$.

Weil $x = 1$, so können wir den Faktor x absondern und gelangen kürzer zum Resultate durch Differentiation von

$$\frac{x^{x-1} - 1}{1 - x + lx}.$$

Ebenso wird man finden, dass man vor der zweiten Differentiation x^{x-1} absondern kann und nur $\frac{x\,lx + x - 1}{1 - x}$ zu betrachten hat.

33) $u = \frac{x\,e^x + e^{-x} - e^x - x\,e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

Da $e^x = 1$ für $x = 0$, so kann man Zähler und Nenner durch e^x dividieren und die Differentiation ausführen an

$$\frac{x + e^{-2x} - 1 - x \,.\, e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}.$$

34) $^*u = \frac{x\,e^{2x} + x\,e^x - 2\,e^{2x} + 2\,e^x}{(e^x - 1)^3}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$.

Wenn $x = 0$ wird $e^x = 1$ und $u = \frac{x \,.\, e^x + x - 2\,e^x + 2}{(e^x - 1)^3}$.

Vor der zweiten Differentiation kann man Zähler und Nenner durch e^x dividieren.

35) $u = \frac{e^x - 1}{e^x \,.\, l\,(1 - x)}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

$e^x = 1$, für $x = 0$, also $u = \frac{e^x - 1}{l\,(1 - x)}$.

36) $u = \frac{a^{lx} - x}{lx}$; für $x = 1$ wird $u = \frac{0}{0} = l\,a - 1$.

37) $^*u = \frac{a - x + a\,l\,x - a \,.\, l\,a}{a - \sqrt{2\,a\,x - x^2}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{0}{0} = -1$.

38) $u = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = 2$.

39) $u = \frac{\sin x}{x^2}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \infty$.

40) $^*u = \frac{x - \sin x}{x^3}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$.

Der wahre Wert von u kann sowohl nach der allgemeinen Methode, als auch dadurch erhalten werden, dass man für $\sin x$ die betreffende Potenzreihe einsetzt.

41) $^*u = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = 2$.

Die mehrfache Differentiation kann umgangen werden durch Einführung der bezüglichen Reihen für e^x, e^{-x} und $\sin x$.

42) $u = \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}$; für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

43) $^*u = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$.

44) $u = \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$; für $x = \frac{1}{6}\pi$ wird $u = \frac{0}{0} = -3$.

45) $u = \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

46) $u = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x \,.\, \sin^2 x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$.

47) $u = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + x) - \sin\beta \,.\, \sin x}{\sin(\alpha + \beta + x)}$;

für $x = \pi - \alpha - \beta$ wird $u = \frac{0}{0} = \sin\alpha$.

48) $^*u = \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = 1$.

49) $^*u = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \,.\, \cos x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = 4$.

50) $u = \dfrac{\operatorname{tang}(a + x) - \operatorname{tang}(a - x)}{\operatorname{arc\,tang}(a + x) - \operatorname{arc\,tang}(a - x)}$,

für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \dfrac{1 + a^2}{\cos^2 a}$.

51) $u = \dfrac{l\,\operatorname{tang} x}{l\,\operatorname{tang} 2x}$; für $x = 0$ wird $u = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$.

52) $u = \dfrac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{g^x \sin gx - h^x \sin hx}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{0}{0} = \dfrac{a - b}{g - h}$.

53) $u = \dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}$; für $x = 1$ wird $u = \infty - \infty = -\frac{1}{2}$.

54) $*u = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$; für $x = 1$ wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

55a) $*u = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = 0$.

55b) $*u = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{3}$.

55c) $*u = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = \infty$.

55d) Man bestimme den Krümmungsradius $\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$ der durch die Gleichung $y = 15\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ dargestellten Kurve für den Punkt $x = 0$, $y = 5$.

Es ist für diesen Punkt $\varrho = \frac{1}{2}$.

In diesen vier Beispielen gelangt man am kürzesten zum Ziele, indem man für $\sin x$ die betreffende Reihe einsetzt und $\sin^2 x$, resp. $\sin^3 x$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt. Darnach erhält man z. B. im Falle der Aufgabe 55b) folgende Rechnung:

$$u = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \ldots\right)^2}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{6} + \ldots\right)^2} = \frac{x^2 - x^2\left(1 - 2\frac{x^2}{6} + \ldots\right)}{x^4\left(1 - 2\frac{x^2}{6} + \ldots\right)}.$$

Fasst man sämtliche Glieder, in welchen x in der 6ten und in höheren Potenzen vorkommt, in dem Zeichen (x^6) zusammen, so kann man schreiben:

$$u = \frac{\frac{x^4}{3} + (x^6)}{x^4 + (x^6)} = \frac{\frac{1}{3} + (x^2)}{1 + (x^2)},$$

woraus für $x = 0$ folgt $u = \frac{1}{3}$.

56) $^*u = \frac{1}{lx} - \frac{1}{x-1}$; für $x = 1$ wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

57) $^*u = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \operatorname{tang} x}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{6}$.

58) $u = x \, . \operatorname{tang} x - \frac{\pi}{2} \sec x$; für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $u = \infty - \infty = -1$.

59) $^*u = \frac{1}{l(1+x)} - \frac{1}{x}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$.

Durch Einführung der Reihe für $l(1+x)$ kann die mehrfache Differentiation vermieden werden.

60) $^*u = \frac{x-1}{2x^2} + \frac{1}{x(e^{2x}-1)}$; für $x = 0$ wird $u = -\infty + \infty = \frac{1}{6}$.

61) $^*u = \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$; für $x = 0$ wird $u = -\infty + \infty = \frac{\pi^2}{6}$.

Dies ist die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \ldots,$$

und für $x = 0$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

62) $u = \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$; für $x = 0$ wird $u = \infty - \infty = \frac{\pi^2}{8}$;

u ist die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \frac{1}{5^2+x^2} + \ldots;$$

für $x = 0$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

63) $^*u = \frac{1}{a-x} - \frac{14a^2}{5a^3 - ax^2 - 4x^3}$; für $x = a$

wird $u = \infty - \infty = -\frac{13}{14a}$.

Berücksichtigt man, dass

$$5a^3 - ax^2 - 4x^3 = (5a^2 + 5ax + 4x^2)(a - x),$$

so genügt eine einfache Differentiation.

64) $*u = \frac{l\,(x^{-1})}{\text{cotang}\, x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

65) $u = \frac{a^x}{x}$; für $x = \infty$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = \infty.$

66) $u = \frac{l\,x}{x}$; für $x = \infty$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

67) $u = \frac{x^{-1}}{\text{cotang}\, x}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 1.$

68) $*u = \frac{l\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\text{cotang}\,\frac{\pi x}{a}}$; für $x = a$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

69) $*u = \frac{l\,(x-1) + \text{tang}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}{\text{cotang}\, x\,\pi}$; für $x = 1$ wird $u = \frac{\infty}{\infty} = -2.$

70) $u = (1-x)\,.\,l\,(1-x)$; für $x = 1$ wird $u = 0\,.\,\infty = 0.$

71) $u = \frac{x^2 - a^2}{x^2}\,\text{tang}\left(\frac{x}{a}\frac{\pi}{2}\right)$; für $x = a$ wird $u = 0\,.\,\infty = -\frac{4}{\pi}.$

72) $u = (a-x)\,.\,\text{tang}\left(\frac{x}{a}\frac{\pi}{2}\right)$; für $x = a$ wird $u = 0\,.\,\infty = \frac{2a}{\pi}.$

73) $u = \text{tang}\, 2x\,.\,\text{cotang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; für $x = \frac{\pi}{4}$ wird $u = \infty\,.\,0 = \frac{1}{2}.$

74) $u = \sec\left(x\frac{\pi}{2}\right) l\,\frac{1}{x}$; für $x = 1$ wird $u = \infty\,.\,0 = \frac{2}{\pi}.$

75) $u = 2^x\,.\,\text{tang}\,\frac{a}{2^x}$; für $x = \infty$ wird $u = \infty\,.\,0 = a.$

76) $u = x^n\,.\,l\,x$; für $x = 0$ wird, wenn n positiv ist, $u = 0\,.\,\infty = 0.$

77a) $u = x^x$; für $x = 0$ wird $u = 0^0 = 1.$

77b) $u = x^{x^m}$; für $x = 0$ wird, wenn $m > 0$, $u = 0^0 = 1$ und wenn $m < 0$, $u = 0^\infty = 0.$

78) $u = x^{\frac{1}{x}}$; für $x = \infty$ wird $u = \infty^0 = 1.$

79a) $u = (1 + m\,x)^{\frac{1}{x}}$; für $x = 0$ wird $u = 1^\infty = e^m.$

79b) $u = (1 + m\,x)^{\frac{1}{x} - n}$; für $x = 0$ wird $u = 1^\infty = e^m.$

80) $u = x^{\frac{1}{1-x}}$; für $x = 1$ wird $u = 1^{\infty} = e^{-1}$.

81) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; für $x = 0$ wird $u = \infty^{0} = 1$.

82) $u = \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}}$; für $x = a$ wird $u = 1^{\infty} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

83) $^*u = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{a}}$; für $x = a$ wird $u = 0^0 = 1$.

84) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x}$; für $x = 0$ wird $u = \infty^{0} = 1$.

85) $^*u = (\cos m x)^{\frac{1}{\sin^2 n x}}$; für $x = 0$ wird $u = 1^{\infty} = e^{-\frac{m^2}{2n^2}}$.

86) $u = \left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)\right]^{\operatorname{cotang} x}$; für $x = 0$ wird $u = 1^{\infty} = e^{2a}$.

87) $u = \left(\cos\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\right)^{x}$; für $x = \infty$ wird $u = e^{-\pi}$.

88a) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; für $x = 0$ wird $u = (\frac{0}{0})^{\infty} = 1^{\infty} = 1$.

88b) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; für $x = 0$ wird $u = (\frac{0}{0})^{\infty} = 1^{\infty} = e^{\frac{1}{3}}$.

88c) $u = \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$; für $x = 0$ wird $u = (\frac{0}{0})^{\infty} = 1^{\infty} = \infty$.

Am einfachsten gelangt man zu den in diesen drei Beispielen verlangten wahren Werten auf folgende Weise:

Es ist

$$\frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{3} + \cdots}{x} = \left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)$$

und daher z. B. im Falle der Aufgabe 88b)

$$u = \left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)^{\frac{1}{x^2}};\ l u = \frac{l\left(1 + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{3} + (x^4)}{x^2} = \tfrac{1}{3} + (x^2).$$

Folglich wird für $x = 0$ $l u = \frac{1}{3}$, also $u = e^{\frac{1}{3}}$.

Die Bezeichnung (x^4), (x^2) betreffend, vergleiche man die Bemerkung zu Aufgabe 55b).

89) $*u = x^{l(1+x)}$; für $x = 0$ wird $u = 0^0 = 1$.

90) $u = x^{\frac{a}{m + n l x}}$; für $x = 0$ wird $u = 0^0 = e^{\frac{a}{n}}$.

91) $*u = \left[\frac{l(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$; für $x = \infty$ wird $u = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0 = 0^0 = 1$.

92) $u = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$; für $x = 0$ wird $u = -\frac{e}{x}$;

denn differentiiert man Zähler und Nenner einmal, so folgt

$$\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} l(1+x)}{x^2} = (1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{1}{x} - \frac{(1+x) l(1+x)}{x^2}\right].$$

Der wahre Wert des ersten Faktors für $x = 0$ ist nach Aufgabe 79b) gleich e. Setzt man nun für $l(1+x)$ die Potenzreihe ein und bildet das Produkt $(1+x)\,l(1+x)$ mit Vernachlässigung aller Potenzen von x, deren Exponent grösser als 2 ist, so ergibt sich leicht $-\frac{1}{2}$ als Grenzwert des zweiten Faktors für $x = 0$. Demnach wird für $x = 0$ $u = -\frac{e}{2}$.

93) $f(x, y) = y^4 - a^2 y^2 + 2 a^2 x^2 - x^4 = 0$.

Welchen Wert hat $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ $y = 0$?

Wenn man auf die gewöhnliche Weise verfährt (nach § 10, 1), so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^3 - a^2 x)}{2y^3 - a^2 y}$. Dieser Ausdruck erscheint unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, weil für dieses Wertepaar $x = 0$, $y = 0$ sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$, als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$, also auch df den Wert Null hat.

Ist überhaupt $f(a, b) = 0$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} = 0$, so erhält man $\frac{dy}{dx}$ durch Auflösung der Gleichung $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{a,b} = 0$, wenn nicht sämtliche Koeffizienten dieses Ausdrucks gleich Null sind.

Wären für $x = a$, $y = b$ sämtliche Koeffizienten von $\left(\frac{d^2 f}{d x^2}\right)_{a,b} = 0$, so setze man $\left(\frac{d^3 f}{d x^3}\right)_{a,b} = 0$ u. s. w.

Im vorliegenden Falle bestimmt sich also $\frac{dy}{dx}$ aus der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{d^2 f}{d x^2}\right)_{0,0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)_{0,0} =$$

$$= \left[4(a^2 - 3x^2) + 2(6y^2 - a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]_{0,0} = 4a^2 - 2a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

und zwar kann $\frac{dy}{dx}$ die beiden Werte $\pm\sqrt{2}$ haben.

Die geometrische Interpretation ist folgende: Die Gleichung $f = 0$ stellt eine Kurve vierten Grades dar, für welche der Koordinatenanfang ein Doppelpunkt ist. Die Tangenten in diesem Doppelpunkte sind gegeben durch die Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha = \pm\sqrt{2}.$$

In ähnlicher Weise verfahre man in den folgenden Beispielen:

94) Wenn $(y^2 + ax)^2 = x^2(a^2 + 2ax - x^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

95) Wenn $(y^2 - x^2)^2 = x^3 - 2axy^2$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

96) Wenn $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 5\sqrt{\frac{1}{24}}$.

97) Wenn $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

98) Wenn $y^2(a - x) = x^3$ ist, dann wird für $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$.

99) **Wenn** $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x y$ **ist, dann wird für** $x = 0$ und $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$.

100) **Wenn** $y^4 + (a^2 + x^2) y^2 = a^2 x^2$ **ist, dann wird für** $x = 0$ **und** $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$.

101) **Wenn** $(x - y)(x^2 + y^2) = a (x + y)^2$ **ist, dann wird für** $x = 0$ **und** $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = -1$.

102) **Wenn** $(x^2 + y^2)^2 - 6 a x y^2 = a x^2 (2 x - a)$ **ist, dann wird für** $x = 0$ **und** $y = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \infty$.

Kapitel VII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen.

---

§ 18. Allgemeine Sätze und Regeln.

A. Absolute Maxima und Minima.

a) Explizite Funktionen eines Argumentes. Versteht man unter $f(x)$ eine Funktion, welche nebst ihrer ersten Ableitung in dem Intervalle von x_1 bis x_2 endlich, stetig und eindeutig ist, so gelten, den Gang dieser Funktion betreffend, folgende Sätze:

1) In der Nähe eines jeden Wertes x_0 innerhalb des betrachteten Intervalles, für welchen $f'(x_0) \gtrless 0$ ist, gibt es sowohl solche Werte des Argumentes, für welche die Funktion $f(x)$ grössere, als auch solche, für welche sie kleinere Werte annimmt, als für x_0.

2) Wenn die Funktion $f(x)$ an beiden Grenzen des Intervalles x_1 x_2 denselben Wert besitzt, so gibt es innerhalb dieses Intervalles wenigstens einen Wert von x, für welchen die erste Ableitung $f'(x)$ verschwindet.

3) Wenn die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ innerhalb des betrachteten Intervalles ihr Zeichen nicht wechselt, so ist der Wert der Funktion an der oberen Grenze des Intervalles grösser oder kleiner als an der unteren, je nachdem $f'(x)$, allgemein zu reden, in dem Intervalle positiv oder negativ ist, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $f'(x)$ für einzelne Werte gleich Null werden kann.

4) Wenn die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ für irgend einen innerhalb des Intervalles x_1 x_2 liegenden Argumentswert verschwindet und ihr Zeichen wechselt, so erreicht die Funktion für diesen Wert von x ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f'(x)$ mit wachsendem Argument von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werten übergeht. Verschwindet

die erste Ableitung dagegen, ohne ihr Zeichen zu wechseln, so tritt für die Funktion $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum ein.

Macht man noch die Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ Ableitungen aller Ordnungen besitze, welche in dem betrachteten Intervalle endlich, stetig und eindeutig sind, so erhält man zur Bestimmung derjenigen Werte von x, für welche ein Maximum oder Minimum der Funktion innerhalb des Intervalles eintreten kann, folgende Regel: Man setze $f'(x) = 0$ und setze alle in dem betrachteten Intervalle liegenden Wurzeln dieser Gleichung auf. Hierauf berechne man für jeden dieser Werte von x den zugehörigen Wert von $f''(x)$, wenn dieser gleich Null ist, den Wert von $f'''(x)$ und wenn auch dieser gleich Null ist, den Wert von $f^{IV}(x)$ u. s. f. Zur Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden eintritt, gilt dann der Satz: Ist die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung, so tritt weder ein Maximum, noch ein Minimum ein; ist die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung und positiv, so entspricht diesem Werte ein Minimum der Funktion; ist dagegen die erste nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung und negativ, so entspricht diesem Werte ein Maximum der Funktion.

Anmerkung 1. Wenn die erste Ableitung $f'(x)$ ein Bruch, etwa $\frac{y}{z}$, also $f''(x) = \frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{z^2}$ ist, so richtet sich das Vorzeichen von $f''(x)$ nach demjenigen von $\frac{1}{z}\frac{dy}{dx}$.

Anmerkung 2. Ein Maximum oder Minimum einer Funktion kann aber auch auftreten für einen solchen speziellen Wert des Argumentes, welcher am Rande des betrachteten Intervalles liegt oder für welchen die früher gestellten Bedingungen, z. B. dass $f'(x)$ endlich und stetig sei, nicht erfüllt sind. Diese Fälle erfordern jedesmal eine besondere Untersuchung.

b) Explizite Funktionen zweier Argumente. Es bezeichne $f(x, y)$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, welche nebst ihren Ableitungen in dem Gebiete,

für welches der Gang dieser Funktion untersucht werden soll, endlich, stetig und eindeutig ist. Wenn die Werte $x = a$, $y = b$ den beiden Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügen, so entspricht diesem Wertepaar ein Maximum oder Minimum der Funktion $f(x, y)$, je nachdem die vollständige Änderung dieser Funktion in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ negativ oder positiv ausfällt. Setzt man der Kürze wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{12}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$, so liefert der Taylor'sche Lehrsatz für die erwähnte vollständige Änderung, wenn man die Inkremente der Variablen x und y mit h und k bezeichnet

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_1 h + f_2 k + \tfrac{1}{2}(f_{11} h^2 + 2 f_{12} hk + f_{22} k^2) + R.$$

Da nach der Voraussetzung für $x = a$, $y = b$ die Grössen f_1 und f_2 verschwinden, so hängt das Vorzeichen der vollständigen Änderung von $f(x, y)$ bei hinreichend kleinen h und k nur von dem Vorzeichen der Summe der Glieder zweiter Ordnung ab. Nun ist aber

$$f_{11} h^2 + 2 f_{12} h k + f_{22} k^2 = f_{11}\left(h + \frac{f_{12}}{f_{11}} k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix}}{f_{11}} k^2,$$

und man erkennt leicht, dass das Vorzeichen der Summe dieser zwei Quadrate nur dann von den speziellen Werten h und k unabhängig ist, wenn die Funktionaldeterminante $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix}$ für das betrachtete Wertepaar einen positiven Wert hat.

Die Funktion $f(x, y)$ besitzt daher ein Maximum für die aus den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ bestimmten Werte $x = a$, $y = b$, wenn für diese Werte zugleich $f_{11} < 0$ und $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix} > 0$, ein Minimum, wenn $f_{11} > 0$ und $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix} > 0$.

Sollten die Glieder zweiter Ordnung für $x = a$, $y = b$ ebenfalls verschwinden, so erfordert die Beantwortung der Frage nach dem Verhalten der Funktion in der Umgebung dieses Wertepaares in jedem besonderen Falle weitergehende Untersuchungen. Wenn

jedoch aus der Aufgabestellung ohne weiteres ersichtlich ist, dass in dem betrachteten Gebiete nur ein Maximum oder nur ein Minimum existieren kann, so werden diese meist mühsamen Untersuchungen entbehrlich. Eine analoge Bemerkung gilt auch für das Folgende.

c) Explizite Funktionen dreier Veränderlichen. Wenn für die Funktion $f(x, y, z)$ der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z dieselben Voraussetzungen bestehen, wie für die Funktion $f(x, y)$ des vorhergehenden Falles, so liefert die Auflösung des Systems der drei Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ diejenigen Wertesysteme von x, y, z, welche der Funktion $f(x, y, z)$ ausgezeichnete Werte erteilen. Aus dem Vorzeichen, welches die Summe der Glieder zweiter Ordnung der vollständigen Änderung von $f(x, y, z)$ in der Umgebung einer so bestimmten Wertegruppe x, y, z annimmt, kann im allgemeinen entschieden werden, welcher Art der auftretende ausgezeichnete Wert der Funktion ist. Bei analoger Bezeichnung wie im vorhergehenden Falle lautet die vollständige Änderung der Funktion unter der Voraussetzung, dass $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sei:

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 + 2f_{13}hl + 2f_{23}kl + f_{33}l^2) + R.$$

Setzt man zur Abkürzung die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33} \end{vmatrix} = \triangle$$

und die Unterdeterminante $\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}$, so lassen sich die Glieder zweiter Ordnung als Summe der drei Quadrate darstellen

$$f_{11}\left(h + \frac{f_{12}}{f_{11}}k + \frac{f_{13}}{f_{11}}l\right)^2 + \frac{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}{f_{11}}\left(k + \frac{f_{11}f_{23} - f_{13}f_{12}}{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}l\right)^2 + \frac{\triangle}{\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}}}l^2.$$

Diese Summe kann, wie leicht zu zeigen, nur dann für beliebige h, k, l ein bestimmtes Zeichen haben, wenn den Koeffizienten der drei Quadrate dasselbe Zeichen zukommt. Die Funktion

$f(x, y, z)$ besitzt demnach für eine aus den Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ bestimmte Wertegruppe x, y, z ein Minimum, wenn die Funktionaldeterminante $\triangle > 0$, die Unterdeterminante $\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}} > 0$ und ihr Anfangsglied $f_{11} > 0$, ein Maximum, wenn $\triangle < 0$, $\frac{\partial \triangle}{\partial f_{33}} > 0$ und $f_{11} < 0$.

d) Implizite Funktionen. Wenn eine implizite Funktion u von x durch die Gleichung $f(u, x) = 0$ gegeben ist, so muss für den Fall eines Maximums oder Minimums $\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(u, x)}{\partial x}}{\frac{\partial f(u, x)}{\partial u}} = 0$ sein. Dieser Bedingung wird im allgemeinen genügt, wenn $\frac{\partial f(u, x)}{\partial x} = 0$ ist. Eliminiert man aus dieser und der Gleichung $f(u, x) = 0$ die Grösse u, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung derjenigen Werte von x, die zu einem Maximum oder Minimum von u gehören. $\frac{d^2 u}{dx^2}$ reduziert sich für die genannten Werte von x auf $-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$. Es tritt also ein Maximum oder ein Minimum ein, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ mit $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleiches Zeichen hat oder nicht.

B. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Sei $f(x, y, z, t, \ldots)$ eine Funktion der $(m + n)$ Veränderlichen $x, y, z, t, \ldots$, zwischen denen noch die m Gleichungen $\varphi_1(x, y, z, t, \ldots) = 0$, $\varphi_2(x, y, z, t, \ldots) = 0, \ldots \varphi_m(x, y, z, t, \ldots) = 0$ bestehen mögen. Mit Hülfe dieser m Bedingungsgleichungen lässt sich die Funktion f im allgemeinen auf eine Funktion F von n unabhängigen Veränderlichen zurückführen, für welche man nach den vorhergehenden Regeln die absoluten Maxima und Minima bestimmen kann. Die n Gleichungen, die man hierbei erhält, indem man die nach den n unabhängigen Veränderlichen genommenen

partiellen Ableitungen von F gleich Null setzt, liefern in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$ ein System von $(m + n)$ Gleichungen, dessen Auflösung die Wertegruppen von $x, y, z, t, \ldots$ ergibt, welche die Funktion f zu einem relativen Maximum oder Minimum machen.

Dieses Verfahren führt jedoch meist auf wenig übersichtliche Resultate und ist in allen den Fällen unanwendbar, wo die angedeutete Elimination praktisch unmöglich ist.

Einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man statt der Veränderlichen selbst ihre Differentiale eliminiert. In dem System von $(m + 1)$ Gleichungen, das man erhält, wenn man die Differentiale der $(m + 1)$ Funktionen $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, genommen in Bezug auf alle darin vorkommenden Veränderlichen, gleich Null setzt, treten nämlich die Differentiale $dx, dy, \ldots$ linear auf, und man kann daher im allgemeinen m dieser Differentiale eliminieren. Hierdurch erhält man eine Gleichung, in welche nur n der Differentiale eingehen, die nun als von einander unabhängig zu betrachten sind. Setzt man die Koeffizienten dieser Differentiale einzeln gleich Null, so erhält man n Gleichungen, welche, zusammengenommen mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$ im allgemeinen die Bestimmung der Wertegruppen $x, y, z, t, \ldots$ gestatten, für welche die Funktion f Maximal- oder Minimalwerte erreicht.

In den meisten Fällen ist jedoch die Methode der sogenannten unbestimmten Multiplikatoren dem soeben besprochenen Verfahren vorzuziehen. Diese Methode besteht darin, dass man nach Multiplikation einer jeden der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ mit einem unbestimmten, konstanten Faktor $\lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$ der Funktion f die Funktion $F = f(x, y, z, t, \ldots) - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_2 - \ldots - \pi\varphi_m$ substituiert, hierauf sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktion, genommen in Bezug auf die als von einander unabhängig betrachteten Variablen $x, y, z, t, \ldots$ gleich Null setzt und die m unbestimmten Multiplikatoren $\lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$ so bestimmt, dass die m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_m = 0$ erfüllt sind. Hiernach wird die Aufsuchung der relativen Maxima und Minima der Funktion f zurückgeführt auf die Bestimmung der absoluten Maxima und Minima der Funktion F. Die $(m + n)$ Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \ldots - \pi \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \ldots - \pi \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = 0,$$

. . . .

etc.

in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\ldots \varphi_m = 0$ reichen im allgemeinen hin zur Bestimmung der $(2m + n)$ Grössen $x, y, z, t, \ldots \lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$, für welche die Funktion f Maximal- oder Minimalwerte erlangt.

In vielen Fällen wird es sich hierbei empfehlen, die Multiplikatoren so lange als möglich in der Rechnung beizubehalten, für dieselben besondere Gleichungen aufzustellen, welche sie allein enthalten und die Unbekannten $x, y, z, t, \ldots$ durch die Multiplikatoren auszudrücken. Häufig führt auch die Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ etc. zu übersichtlicheren Resultaten, als die wirkliche Ausrechnung aller Grössen $x, y, z, t, \ldots \lambda, \mu, \nu, \ldots \pi$.

Anmerkung 1. Methoden zur Entscheidung, ob in einem gegebenen Falle ein relatives Maximum oder Minimum oder keines von beiden auftritt, findet man in der Abhandlung von Richelot: Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima. Astronomische Nachrichten von Schumacher, Bd. 48, Seite 274—286.

Anmerkung 2. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass bei denjenigen unter den folgenden Aufgaben, welche sich dazu eignen, die Anfertigung einer mehr oder weniger sorgfältigen Skizze sehr dazu beitragen wird, den Zusammenhang der in Betracht gezogenen Grössen besser zu übersehen.

Anmerkung 3. Oft vereinfacht sich die Aufgabe, die Maxima oder Minima von $u = f(x) = a + b\,[\varphi(x)]^n$ (a und b Konstanten, $n > 0$) aufzusuchen, wenn man zunächst die Werte von x bestimmt, die $v = \varphi(x)$ zu einem solchen machen. Sie sind mit den gesuchten Werten identisch.

Ist allgemein $u = \Phi(\varphi(x)) = \Phi(z)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, und bleibt $\frac{du}{dz} = \frac{d\,\Phi(z)}{dz}$ in dem ganzen zu untersuchenden Intervalle 1) stets positiv oder 2) stets negativ,

so suche man die Maxima und Minima von $z = \varphi(x)$ auf. Im Fall 1) entspricht einem Maximum resp. Minimum von z ein Maximum oder Minimum von u, im Fall 2) ein Minimum oder Maximum.

§ 21. Beispiele.

1) $u = ax - x^2$; für $x = \frac{1}{2}a$ wird $u = \frac{1}{4}a^2$ ein Max.

2) $u = 2x + 3\sqrt[3]{(a-x)^2}$; für $x = a - 1$ wird $u = 2a + 1$ ein Max.

3) $u = x(a-x)^2$; für $x = \frac{1}{3}a$ wird $u = \dfrac{4a^3}{27}$ ein Max.

für $x = a$ wird $u = 0$ ein Min.

4) $u = x^4 - 8ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 12a^4$;

für $x = a$ wird $u = 3a^4$ ein Min.,
für $x = 2a$ wird $u = 4a^4$ ein Max.,
für $x = 3a$ wird $u = 3a^4$ ein Min.

5) $u = m + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax - x^2)^4}$; für $x = 0$ wird $u = m$ ein Min.,

für $x = a$ wird $u = m + \frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$ ein Max.,
für $x = 2a$ wird $u = m$ ein Min.

6) $u = \dfrac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$;

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6}{(x^4 - x^2 + 1)^2} = 0, \quad x = \pm 1.$$

Operieren wir zur Bestimmung des Zeichens von $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ wie § 20. a) Anm. 1. angegeben, so ergibt sich $\dfrac{8x - 16x^3 - 6x^5}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$, welches für $x = +1$ negativ und für $x = -1$ positiv wird.

Durch Substitution in die oberste Gleichung finden wir, dass für

$$x = +1, \; u = +2 \text{ ein Max.},$$
$$x = -1, \; u = -2 \text{ ein Min.}$$

7) $u = \dfrac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x^4 + 2x^2 - x^6 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2} = 0,$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad x_3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$x_4 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Verfahren wir, wie in der vorigen Aufgabe, so finden wir, dass das Zeichen von $\frac{d^2 u}{d x^2}$ abhängt von $4x^3 + 2x - 3x^5$.

Dieser Ausdruck wird negativ für x_1 und x_2, positiv für x_3 und x_4. Es wird demnach $u = +\frac{1}{2}$ ein Maximum für x_1, $u = +\frac{1}{2}$ ein Maximum für x_2, $u = -\frac{1}{2}$ ein Minimum für x_3 und endlich $u = -\frac{1}{2}$ ein Minimum für x_4.

8) $u = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; für $x = 0$ wird $u = \frac{27}{4}$ ein Min.,
für $x = -3$ wird $u = 0$ weder ein Min., noch ein Max.

9) $u = x\sqrt{ax - x^2}$; für $x = \frac{3}{4}a$ wird $u = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ ein Max.

10) $u = x^2\sqrt{4a^2 - x^2}$; für $x = \pm 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ wird $u = \frac{16}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.,
für $x = 0$ wird $u = 0$ ein Min.

11) $u = \frac{\sqrt{(a^4 + x^4)^3}}{2a^2x^3}$; für $x = a$ wird $u = a\sqrt{2}$ ein Min.,
für $x = -a$ wird $u = -a\sqrt{2}$ ein Max.

12) $u = a(x-b)^4$; für $x = b$ wird $u = 0$ ein Min., wenn $a > 0$,
ein Max., wenn $a < 0$.

13) $u = x^5 - 5ax^4 + 5a^2x^3 + a^5$;
für $x = a$ wird $u = 2a^5$ ein Max.,
für $x = 3a$ wird $u = -26a^5$ ein Min.,
für $x = 0$ wird $u = a^5$ weder ein Min., noch ein Max.

14) $u = (x-1)(2-x)^2$; für $x = 2$ wird $u = 0$ ein Min.,
für $x = \frac{4}{3}$ wird $u = \frac{4}{27}$ ein Max.

15) $u = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16$;
für $x = 2$, $u = 0$ Min.,
für $x = -\frac{2}{5}$, $u = \frac{62208}{3125}$ Max.

16) $au^3 - u^2x^2 + x^4 = 0$; für $x = \pm 2a\sqrt{2}$ wird $u = 4a$ ein Min.

17) $u^2 - 2mxu + x^2 - a^2 = 0;$

$$\text{für } x = \pm \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}} \text{ wird } u = \pm \frac{a}{\sqrt{1-m^2}} \text{ ein } \begin{cases} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{cases}$$

18) $u = x^x$; für $x = \frac{1}{e}$ wird $u = \sqrt[e]{e^{-1}}$ ein Min.

19) $u = e^x . \cos 2x$; für $x = \frac{1}{2} \text{arc tang } \frac{1}{2}$ wird

$$u = \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\, e^{\frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{1}{2}} \text{ ein Max.}$$

20) $u^4 - 4a^2ux + x^4 = 0$; $x = \pm a \sqrt[8]{3}$, $u = \pm a \sqrt[8]{27}$ Max. o. Min.

21) $u = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$; für $x = -2$ wird $u = 0$ ein Min., $x = -1$, $u = 16$ ein Max., $x = 1$, $u = 0$ ein Min.

22) $u = x^8 + \frac{1}{7}x^7 - 4x^6 - \frac{8}{5}x^5 + 6x^4 + x^3 - 4x^2 - x;$
für $x = -1$ wird u ein Min., für $x = -\frac{1}{8}$ ein Max., für $x = +1$ ein Min.

23) $u = \frac{1}{7}x^7 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{19}{3}x^3 - 12x;$
für $x = -2$, -1 und $+\sqrt{3}$ wird u ein Max.,
für $x = -\sqrt{3}$, $+1$ und $+2$ ein Min.

24) $u^3 - 3aux + x^3 = 0$. Ist $a > 0$, so ist
1) für $x = a\sqrt[3]{2}$, u ein Max. $= a\sqrt[3]{4}$,
2) für $x = 0$, u ein Min. $= 0$.

25) $u = \left(\frac{a}{x}\right)^x$; für $x = \frac{a}{e}$ wird $u = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^a$ ein Min. oder Max., je nachdem $a \lessgtr 0$.

26 a) $Au^2 + 2Bxu + Cx^2 + 2Du + 2Ex + F = 0;$

$$\text{für } x = -\frac{BD-AE}{B^2-AC} \pm \frac{B}{B^2-AC}\sqrt{\frac{(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{AC}}$$

$$\text{wird } u = \frac{CD-BE}{B^2-AC} \mp \frac{C}{B^2-AC}\sqrt{\frac{(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{AC}}$$

respektive für das obere Zeichen ein Max., für das untere ein Min.

26 b) $u = x^3 + x + 1$. Es gibt keinen Wert für x, der u zu einem Max. oder Min. macht.

26c) $u = x^3 + a x^2 + b x + c$. Für $x = -\frac{1}{3} a \mp \sqrt{\frac{1}{9} a^2 - \frac{1}{3} b}$ wird $u = \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} a b + c \mp \frac{2}{3} b \sqrt{\frac{1}{9} a^2 - \frac{1}{3} b}$ zu einem Max. oder Min., wenn $a^2 > 3b$ ist; ist dagegen $a^2 = 3b$, so tritt für $x = -\frac{a}{3}$ weder ein Max., noch ein Min. ein.

26d) $u = 4x^5 + 5x^4 - 60x^3 + 110x^2 - 80x + 1$;
für $x = 1$ wird u ein Min., für $x = -4$ ein Max.

26e) $u = (x - \alpha)^4 (x - \beta)^5$; für $x = \alpha$ wird $u = 0$ ein Max. oder Min., je nachdem $\alpha \lesseqgtr \beta$; für $x = \beta$ gibt es weder ein Max. noch ein Min.; für $x = \frac{1}{9}(5\alpha + 4\beta)$ endlich wird $u = 4^4 . 5^5 \left(\frac{\alpha - \beta}{9}\right)^9$ ein Min. oder Max., je nachdem $\alpha \lesseqgtr \beta$ ist.

27a) $u = \frac{x}{lx}$; für $x = e$, wird $u = e$ ein Min.

27b) $u = \sqrt[x]{lx}$; für $x = 5{,}831\ldots$ wird $u = \sqrt[5{,}831]{1{,}7632\ldots} = 1{,}102\ldots$ ein Max.

28) $u = \sin^m(x) . \sin^n(a - x)$; für $x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} . \arcsin\left(\frac{m-n}{m+n} \sin a\right)$ wird u ein Max.

29) $u = \sin x . \cos 2x$;
für $x = (2h + \frac{1}{2})\pi$ wird $u = -1$ ein Min.,*)
für $x = (2h - \frac{1}{2})\pi$ wird $u = +1$ ein Max.,
für $x = 2h\pi + \arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$ wird $u = \frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Max.,
für $x = 2h\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$ wird $u = -\frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Min.

30) $u = \sin n x . \sin^n(\alpha + x)$;
unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \pi$ ist, wird für $x = \frac{\pi - \alpha}{n + 1}$, $u = \sin \frac{n}{n+1}(\pi - \alpha)\left(\sin\frac{\pi + n\alpha}{n + 1}\right)^n$ ein Max.

31a) $u = \cos x . \sin^2 x$; für $x = h\pi$ wird $u = 0$ und zwar ein Min., wenn h gerade, und ein Max., wenn h ungerade ist; für $x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ wird $u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.

---

*) Hier und in dem Folgenden bedeutet h eine beliebige ganze Zahl.

31 b) $u = \sin x \,.\, \cos(\alpha - x)$; für $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}(2h+1)\pi$ wird $u = \frac{1}{2} \,.\, [\sin\alpha + (-1)^h]$ ein Max., wenn h gerade, und ein Min., wenn h ungerade ist.

32 a) $u = e^x \,.\, \sin(x - \alpha)$; für $x = \alpha + (h + \frac{3}{4})\pi$ wird, je nachdem h gerade oder ungerade ist, $u = (-1)^h \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} \,.\, e^{\alpha + (h + \frac{3}{4})\pi}$ ein Max. oder Min.

32 b) $u = \dfrac{e^x}{\sin(x - \alpha)}$; für $x = \alpha + (h + \frac{1}{4})\pi$ wird, je nachdem h gerade oder ungerade ist, $u = (-1)^h \sqrt{2} \,.\, e^{\alpha + (h + \frac{1}{4})\pi}$ ein Min. oder Max.

33 a) $u = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. Für $x = 0$ und allgemein $x = 2h\pi$ wird $u = 3$ ein Max.; für $x = \pi$ und allgemein $x = (2h+1)\pi$ wird $u = -1$ ein Min.; für $x = 2h\pi + \arccos\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$ wird $u = \dfrac{-17 \mp 7\sqrt{7}}{27}$ ein $\begin{cases}\text{Min.,}\\ \text{Max.}\end{cases}$

33 b) $u = \operatorname{tang}^m x \,.\, \operatorname{tang}^n(\alpha - x)$;

für $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{m-n}{m+n}\operatorname{tang}\alpha\right)$ wird u ein Max.

34 a) Aufg. Es seien gegeben die Gleichungen

$$a^2 + b^2 - x^2 - y^2 + 2ax + 2by - 2z = 0,$$
$$a^2x^2 - b^2y^2 - 2a^3x + 2b^3y + (a^2 - b^2)z = 0;$$

es soll das Max. für z gefunden werden.

Lös. z wird ein Max. $= a^2 + b^2$ für $x = a$, $y = b$.

34 b) Aufg. Das Max. oder Min. von z zu bestimmen, wenn

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 - 2z = 0,$$
$$16x^2 - 9y^2 - 96x + 72y - 7z = 0.$$

Lös. Für $x = 3$, $y = 4$ wird $z = 0$ zu einem Min.

35 a) Aufg. Für welche Werte von x und y wird

$$u = x^2 + xy + y^2 - mx - ny$$

zu einem Max. oder Min.?

Lös. Für $x = \frac{1}{3}(2m - n)$, $y = \frac{1}{3}(2n - m)$ wird

$$u = -\tfrac{1}{3}(m^2 - mn + n^2)$$

ein Min.

35b) **Aufg.** Für welche Werte von x und y wird

$$u = a^2 x^2 + 2\,b\,x\,y + c^2 y^2 - e\,x - g\,y$$

zu einem Max. oder Min.?

Lös. Für $x = \frac{c^2 e - b\,g}{2\,(a^2 c^2 - b^2)}$, $y = \frac{a^2 g - b\,e}{2\,(a^2 c^2 - b^2)}$ wird, wenn $a^2 c^2 > b^2$ ist, u zu einem Min.

35c) **Aufg.** Für welche Werte von x, y, z wird $u = \sin x \sin y \sin z$ ein Max., wenn $x + y + z = \pi$?

Lös. Es wird $\operatorname{cotang} x = \operatorname{cotang} y = \operatorname{cotang} z$ oder $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, und daher ist das Max. von $u = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

36a) **Aufg.** Für welche Werte von x und y wird

$$u = \tfrac{1}{2}\,x\,y + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$$ ein Max. oder Min.?

Lös. Für $x = 21$, $y = 20$ wird $u = 282$ ein Max.

36b) **Aufg.** Man bestimme den grössten und kleinsten Wert, welchen die Funktion $f = x^2 + 4\,y^2 + 3\,z^2$ annehmen kann, wenn zwischen den Veränderlichen x, y, z die Gleichungen

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$$ und
$$\psi = x + \tfrac{1}{2}\,y + \tfrac{1}{3}\,z \qquad = 0$$ bestehen.

Lös. Führt man die unbestimmten Multiplikatoren λ und $2\,\mu$ ein, so hat man das absolute Max. und Min. der Funktion $F = f - \lambda\,\varphi - 2\,\mu\,\psi$ aufzusuchen. Die Werte der unbekannten Grössen x, y, z, λ und μ bestimmen sich aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\varphi = 0$ und $\psi = 0$. Es ergibt sich

	λ	μ	x	y	z	f
1)	$+\frac{25}{7}$	$+\frac{36}{7}$	-2	$+6$	-3	$+175$ (Max.)
2)	$+\frac{25}{7}$	$-\frac{36}{7}$	$+2$	-6	$+3$	
3)	$+\frac{19}{7}$	$+\frac{36}{7}$	-3	$+2$	$+6$	$+133$ (Min.)
4)	$+\frac{19}{7}$	$-\frac{36}{7}$	$+3$	-2	-6	

36c) **Aufg.** Man führe die analogen Rechnungen durch für die Funktion

$$f = x^2 - y^2,$$ wenn
$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$ und
$$\psi = x + y + \tfrac{1}{2}\,z = 0.$$

Lös.	λ	μ	x	y	z	f
1)	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+2$	-1	-2	$+3$ (Max.)
2)	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-2	$+1$	$+2$	
3)	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+1$	-2	$+2$	-3 (Min.)
4)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$+2$	-2	

36 d) **Aufg.** Man löse dieselbe Aufgabe für

$$f = 2y^2 + z^2, \text{ wenn}$$
$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \text{ und}$$
$$\psi = x + y - \tfrac{1}{2} z = 0.$$

Lös.	λ	μ	x	y	z	f
1)	$+\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	$+2$	-2	$+12$ (Max.)
2)	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+1$	-2	$+2$	
3)	$+\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-2	$+1$	-2	$+6$ (Min.)
4)	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+2$	-1	$+2$	

37) **Aufg.** Eine gerade Linie a in zwei solche Teile zu teilen, dass das Rechteck aus beiden Teilen ein Max. sei.

Lös. Die Linie muss halbiert werden.

38) **Aufg.** Aus zwei gegebenen Seiten das an Flächeninhalt grösste Dreieck zu bilden.

Lös. Der eingeschlossene Winkel muss ein Rechter sein.

39) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, die auf einerlei Grundlinie g stehen und gleichen Umfang u haben, das an Flächeninhalt grösste zu finden.

Lös. Sei x die zweite Seite des Dreiecks, so ist bekanntlich der Inhalt desselben:

$$I = \tfrac{1}{4} \sqrt{u(u-2g)(u-2x)(2g+2x-u)}.$$

I wird ein Max., wenn $(u-2x)(2g+2x-u)$ ein Max. wird. Hieraus ergibt sich als Resultat, dass der Inhalt ein Max. wird, wenn man über g ein gleichschenkliges Dreieck mit $\frac{1}{2}(u-g)$ beschreibt.

40) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche eine Seite s und den Gegenwinkel α gleich haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Lös. Bezeichnet x den zweiten Winkel, so ist der Inhalt des Dreiecks $I = \frac{s^2}{2\sin\alpha} \cdot \sin x \cdot \sin(\alpha + x) = \text{Max.}$

Hieraus $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Jeder der Seite s anliegende Winkel ist $= R - \frac{1}{2}\alpha$, das Dreieck ist also gleichschenklig.

41) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel α und die Summe der einschliessenden Seiten $= 2s$ haben, das grösste zu finden.

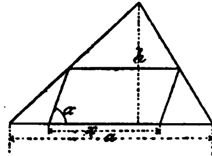
Lös. Jede der beiden einschliessenden Seiten ist $= s$.

42) **Aufg.** In den Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks drei solche Punkte zu finden, dass die Verbindungslinien derselben wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und zwar das kleinstmögliche.

Lös. Das neue Dreieck wird ein Min., wenn die Summe der übrigen drei Dreiecke ein Max. wird. Diese stehen aber der Anforderung gemäss auf gleichen Grundlinien (den Seiten des neuen Dreiecks) und haben denselben Gegenwinkel $= \frac{2}{3} R$, also ist jedes nach Aufg. 40 ein Max., wenn jeder an der Grundlinie liegende Winkel $1\,R - \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} R$ wird, d. h. wenn auch sie gleichseitig sind.

Es entsteht also das kleinstmögliche Dreieck durch die Verbindung der Mitten der Seiten.

43) **Aufg.** Unter allen Parallelogrammen mit einem gegebenen Winkel, die man in ein gegebenes Dreieck so einschreiben kann, dass eine Seite des Parallelogramms in eine Seite des Dreiecks und die beiden anderen Ecken des Parallelogramms in die beiden anderen Seiten des Dreiecks fallen, das grösste zu finden.



Lös. Wenn a die Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks, x die Grundlinie des Parallelogramms (ein Teil von a), so ist die Höhe des letzteren $\frac{h(a-x)}{a}$ und sein Inhalt

$$u = \frac{h(a-x)}{a} x \text{ wird ein Max. mit } (a-x)x,$$

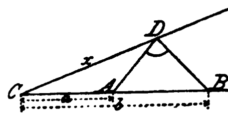
wenn $x = \frac{1}{2} a$.

Das Parallelogramm wird mithin ein Max., wenn seine Grundlinie die Hälfte der Grundlinie des Dreiecks und seine Höhe gleich der halben Dreieckshöhe ist.

44) **Aufg.** Das grösstmögliche Dreieck mit einem gegebenen Winkel in ein gegebenes Dreieck so einzutragen, dass eine Seite des ersten parallel mit einer Seite des letzteren geht. (cf. Figur auf pag. 127.)

Lös. Der Inhalt des verlangten Dreiecks ist offenbar die Hälfte des in der vorigen Aufgabe erwähnten Parallelogramms; die Bedingungen für die Max. beider Figuren sind also dieselben, und man zieht daher in der halben Höhe des Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie und beschreibt über dieser Parallelen ein Dreieck, welches den gegebenen Winkel entweder als anliegenden oder gegenüberliegenden enthält, und dessen dritte Ecke in der Grundlinie liegt.

45) **Aufg.** In dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels C sind zwei Punkte A und B durch ihre Entfernungen a und b von dem Scheitel des Winkels gegeben; man soll in dem anderen Schenkel ein solchen Punkt D finden, dass die von ihm nach den beiden gegebenen Punkten A und B gezogenen Linien den grösstmöglichen Winkel $A\,D\,B$ einschliessen.



Lös. Bezeichnet man CD mit x, so ist:

$$\operatorname{tang} C\,D\,A = \frac{a \sin C}{x - a \cos C}, \quad \operatorname{tang} C\,D\,B = \frac{b \sin C}{x - b \cos C},$$

$$\angle A\,D\,B = C\,D\,B - C\,D\,A = \text{Max.},$$

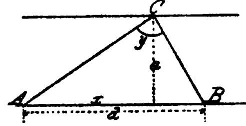
$$\operatorname{tang} A\,D\,B = \frac{(b-a)\,x \sin C}{x^2 - (a+b)\,x \cos C + a\,b},$$

$$\frac{x}{x^2 - (a+b)\,x \cos C + a\,b} = \text{Max.} = f(x), \quad f'(x) = 0,$$

wenn $x = \sqrt{a\,b}$, $f''(x)$ wird negativ. Der Winkel wird also ein Max., wenn die Entfernung des gesuchten Punktes von dem Scheitel des gegebenen Winkels die mittlere Proportionale zwischen a und b ist.

Leicht kann geometrisch nachgewiesen werden, dass der Punkt D der Berührungspunkt eines durch die Punkte A und B gehenden und den zweiten Schenkel des gegebenen Winkels berührenden Kreises sein muss. Entsprechend den beiden Vorzeichen von $\sqrt{a\,b}$ gibt es zwei solcher Kreise, deren Berührungspunkte zu verschiedenen Seiten des Punktes C liegen.

46) **Aufg.** Wenn in einer von zwei parallelen Linien zwei Punkte A und B in einer Distanz $= d$ gegeben sind, so soll man in der anderen Parallelen einen solchen Punkt C finden, dass die von ihm nach den beiden ersten Punkten gezogenen Geraden den grösstmöglichen Winkel einschliessen.



Lös. Sei a das Lot vom Scheitelpunkte C des Winkels (y) auf die Gerade AB, x der Abstand des Fusspunktes dieses Lotes von dem gegebenen Punkte A, so ist

$$\operatorname{tang} y = \frac{a\,d}{a^2 - d\,x + x^2}.$$

Der Winkel y wird ein Max., wenn $x = \frac{1}{2} d$ ist. Man errichtet daher in der Mitte von AB ein Lot auf AB; der Durchschnittspunkt mit der anderen Parallelen ist der gesuchte.

47) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Lös. Bezeichnen A, B, C die Winkel, a, b, c die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks ABC, so wird dessen Inhalt u ausgedrückt durch die Formel

$$u = s^2 \operatorname{tang}\frac{A}{2} \operatorname{tang}\frac{B}{2} \operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Bezeichnet man mit $2x$ den zweiten Winkel des Dreiecks, so ist

$$u = s^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} x \operatorname{cotang}(\alpha + x).$$

Dies wird ein Max., wenn

$$\frac{\sin 2(\alpha + x) - \sin 2x}{2\cos^2 x \sin^2(\alpha + x)} = 0$$

und

$$\cos 2(\alpha + x) - \cos 2x$$

negativ wird.

Hieraus erhält man $2x = R - \alpha$; also wird auch der dritte Winkel $= R - \alpha$ und jede der den Winkel 2α einschliessenden Seiten $= \frac{s}{1 + \sin\alpha}$, die gegenüberliegende Seite $= \frac{2s \cdot \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

48) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und denselben Flächeninhalt $= u$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Wenn die Bezeichnungen dieselben bleiben, wie in der vorigen Aufgabe, so haben wir

$$s^2 = \frac{u}{\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,x\,.\,\text{cotang}\,(\alpha + x)}.$$

Die Grösse s wird ein Min., wenn $x = \frac{1}{2}(R - \alpha)$ wird. Jede der den Winkel 2α einschliessenden Seiten ist $= u\sqrt{2 \,\text{cosec}\, 2\alpha}$ und die gegenüberliegende Seite $= 2u\sqrt{\text{tang}\,\alpha}$.

49) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche dieselbe Höhe $= h$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Bezeichnen wir mit y die zu h gehörige und mit x eine anliegende Seite, mit u den Flächeninhalt, so ist

$$1)\quad u^2 = \frac{y^2 h^2}{4} = s(s-y)(s-x)(y+x-s)\ldots$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass u offenbar ein Max., wenn y ein Max., aus der zweiten, wenn

$$(s-y)(s-x)(y+x-s) = \varphi(x, y)$$

gesetzt wird,

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{(s-y)(2s-2x-y)}{(s-x)(2y-2s+x)} = 0,$$

$$\text{wenn } y = 2(s-x)\ldots$$

Diesen Wert für y in 1) gesetzt, erhalten wir

$$(s-x)^2 h^2 - s(s-x)^2(2x-s) = 0,$$
$$(s-x)^2(h^2 - 2xs + s^2) = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = \frac{h^2+s^2}{2s}$; hieraus folgt $y = \frac{s^2-h^2}{s}$. Die dritte Seite ist $= 2s - x - y = \frac{h^2+s^2}{2s}$, also ist das Dreieck gleichschenklig.

50) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche dieselbe Höhe $= h$ und denselben Flächeninhalt $= I$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Mit I und h ist auch die zu h gehörige Grundlinie $\frac{2I}{h} = a$ gegeben; bezeichnet nun y den halben Umfang und x eine zweite Seite des Dreiecks, so ist

1) $I = \sqrt{y(y-a)(y-x)(a+x-y)} = \sqrt{\varphi(x, y)} \ldots$

2) $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$, wenn $y = x + \frac{a}{2} \ldots$

Führen wir 2) in 1) ein und quadrieren, so erhalten wir

$$\frac{(4x^2 - a^2)a^2}{16} = I^2 = \frac{a^2h^2}{4},$$

$$x = \frac{1}{h} \cdot \sqrt{I^2 + h^4}.$$

Aus 2) folgt, dass $y = x + \frac{1}{2}a$, das Dreieck also gleichschenklig ist über a.

Der Umfang wird also ein Min., wenn man über $\frac{2I}{h}$ mit $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{I^2 + h^4}$ ein gleichschenkliges Dreieck beschreibt.

51) Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripheriewinkel einzutragen, dass der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzte Flächenraum ein Max. wird.

Lös. Mit gegebenem Kreise und gegebenem Peripheriewinkel sind Sehne und Bogen zu diesem Winkel konstant. Der Wert des fraglichen Inhalts richtet sich daher nur nach dem Inhalt desjenigen Dreiecks, welches über der konstanten Sehne beschrieben wird. Dasselbe wird aber nach Aufg. 40 ein Max., wenn es gleichschenklig ist.

Der Winkel muss also so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbiert.

52) Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripheriewinkel einzutragen, dass der Umfang der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzten Fläche ein Max. werde.

Lös. Der Winkel muss so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbiert.

53) **Aufg.** Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Umfang $= 2s$ die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Der Radius des gesuchten Kreises ist $= \frac{s}{2}$, der zugehörige Bogen $= s$ und der Winkel am Mittelpunkte in Graden ausgedrückt $= \frac{360^0}{3{,}14159\ldots} = 114^0\,35'\,29{,}61''\ldots$

54) **Aufg.** Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$ denjenigen zu finden, der den kleinsten Umfang hat.

Lös. Der Radius des gesuchten Kreises ist $= u$, d. h. gleich der Seite eines Quadrats, welches den gegebenen Flächeninhalt angibt, und der Winkel am Mittelpunkte, in Graden ausgedrückt $= \frac{360^0}{3{,}14159\ldots} = 114^0\,35'\,29{,}61''\ldots$

55) **Aufg.** Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Umfang $2s$ denjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

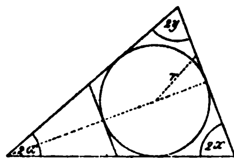
$$= \frac{s}{3{,}14159\ldots} = s \,.\, 0{,}318309\ldots$$

56) **Aufg.** Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$ denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Umfang hat.

Lös. Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$= \frac{u}{\sqrt{3{,}14159\ldots}} = u \,.\, 0{,}56418\ldots$$

57) **Aufg.** Unter allen Dreiecken, die einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r umschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den grössten oder kleinsten Flächeninhalt hat.



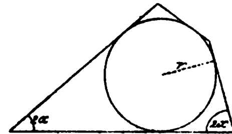
Lös. Denkt man sich den gegebenen Winkel 2α durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet und nennt die Winkel, welche die dritte Tangente mit diesen zwei Tangenten einschliesst, resp. $2x$ und $2y$, so besteht zwischen x und y die

Gleichung $x + y + \alpha - 90^0 = 0$, und es wird die Fläche I des Dreiecks, $I = r^2$ (cotang α + cotang x + cotang y), ein Max., resp. Min. für $x = y$. Zieht man daher eine gerade Linie von dem Scheitel des Winkels durch den Mittelpunkt des Kreises, so sind die Durchschnittspunkte dieser Zentrallinie mit der Peripherie die Berührungspunkte der dritten Seiten der beiden sich ergebenden Dreiecke. In dem einen Falle (Min.) wird der Kreis alle drei Seiten des Dreiecks auf der inneren Seite berühren und liegt also ganz innerhalb des Dreiecks; in dem anderen Falle aber (Max.) berührt er eine Seite von aussen und die beiden anderen in ihren Verlängerungen.

58) Aufg. Unter denselben Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe, soll das Dreieck mit dem grössten oder kleinsten Umfang gefunden werden.

Lös. Es sind dieselben beiden Dreiecke wie vorhin.

59) Aufg. Unter allen Vierecken mit einem gegebenen Winkel 2α, die einem gegebenen Kreise mit dem Radius r umschrieben sind und zugleich der Bedingung genügen, dass um dieselben ein Kreis beschrieben werden kann, das grösste und kleinste zu finden.



Lös. Alle Vierecke, welche einem gegebenen Kreise umschrieben sind und um welche sich zugleich ein Kreis beschreiben lässt, sind teils solche, deren Fläche ganz ausserhalb der Fläche des gegebenen Kreises liegt, teils solche, welche den gegebenen Kreis ganz umschliessen. Unter den ersteren gibt es ein grösstes, unter den letzteren ein kleinstes. Denkt man sich den gegebenen Winkel 2α durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet, so erhält man das grösste Viereck, wenn man auf diesen Tangenten selbst von den Berührungspunkten an gerechnet rückwärts den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten zwei neue Tangenten an den Kreis zieht; und das zweite, das kleinste Viereck erhält man, wenn man auf denselben ersten Tangenten auf ihren Verlängerungen von den Berührungspunkten an den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten Tangenten an den Kreis zieht. Bei dem letzten Viereck berührt der Kreis alle vier Seiten von innen, liegt also ganz innerhalb des

Vierecks; bei dem ersten dagegen berührt er zwei Seiten von aussen und alle in ihren Verlängerungen. Bei dem grössten Viereck sind je zwei Seiten respektive $r(\text{cotang}\,\alpha - 1)$ und $r(\text{tang}\,\alpha - 1)$, bei dem kleinsten dagegen $r(\text{cotang}\,\alpha + 1)$ und $r(\text{tang}\,\alpha + 1)$.

Für die Rechnung wird am besten die Hälfte eines der beiden nicht bekannten Winkel als unabhängige Variable eingeführt, die beiden Winkel findet man je $= 90^0$.

60) Aufg. Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r so umschrieben sind, dass dieser ganz innerhalb liegt, das kleinste zu finden.

Lös. Erster Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel 2α und 2β an einer Seite liegen, dann ergibt sich zunächst die Gleichheit der beiden anderen Winkel, und man erhält für die einzelnen Seiten folgende Ausdrücke:

die Seite, welche zwischen 2α und 2β liegt $= \dfrac{r \,.\, \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$,

die Seite, welche zunächst an 2β liegt $= \dfrac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\beta}$,

die Seite, welche zunächst an 2α liegt $= \dfrac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\alpha}$,

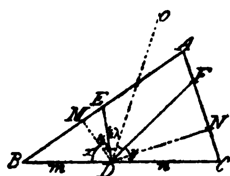
die Seite, welche der ersten gegenüber liegt $= 2r\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Zweiter Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel 2α und 2γ sich diagonal gegenüber liegen, so sind die beiden anderen Winkel zunächst wieder einander gleich, und es werden die beiden Seiten, welche den Winkel 2α einschliessen:

$$= \frac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \text{ und die anderen } = \frac{r\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}.$$

In beiden Fällen empfiehlt es sich, die Hälfte eines der beiden nicht gegebenen Winkel als unabhängige Variable zu wählen.

61) Aufg. In einer Seite BC eines gegebenen Dreiecks ABC ist ein Punkt D gegeben; man soll von diesem nach zwei zu findenden Punkten E und F in den beiden anderen Seiten AB und AC zwei Linien DE und DF, die einen gegebenen Winkel λ einschliessen, so ziehen, dass das hierdurch entstandene Dreieck seinem Inhalte nach ein Minimum wird.

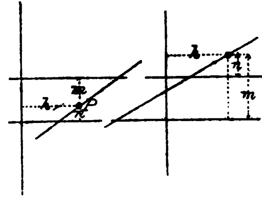


Lös. Bezeichnet man die beiden Stücke BD und DC der Seite BC mit m und n, die Winkel BDE und FDC mit x und y, so ist der Inhalt des Dreiecks DEF durch

$$\frac{\frac{1}{2} m n \sin B \sin C \sin \lambda}{\sin(2R - x - B)\sin(x + \lambda - C)}$$

gegeben, der ein Min. wird, wenn der Nenner ein Max. ist. Hierdurch erhält man $2R - 2x - B - \lambda + C = 0$, woraus $y - x = B - C$ folgt. Die Konstruktion ist hiernach folgende: Man fälle von D auf die Seiten AB und AC Lote DM, DN, halbiere den Winkel MDN und trage zu beiden Seiten der Halbierungslinie DO gleiche Winkel ODE und $ODF = \frac{1}{2}\lambda$ ab, wodurch man das verlangte Dreieck DEF erhalten wird.

62) Aufg. In einer Ebene sind zwei parallele Linien gegeben, die von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden; ebenso ist ein Punkt in derselben Ebene gegeben. Es soll durch diesen eine solche die beiden Parallelen schneidende Gerade gezogen werden, dass das Produkt der Stücke, welche auf den Parallelen zwischen dieser neuen und der gegebenen schneidenden Linie liegen, ein Max. sei.



Lös. Die Abstände des gegebenen Punktes von den beiden Parallelen seien m und n, $(m > n)$; der Abstand von der gegebenen schneidenden Linie sei h. Je nachdem der gegebene Punkt entweder innerhalb oder ausserhalb der Parallelen liegt, sind die verlangten Stücke $\frac{h(m \pm n)}{2m}$ und $\frac{h(m \pm n)}{2n}$. Im ersteren Falle werden die Stücke auf derselben Seite, im zweiten auf verschiedenen Seiten der gegebenen Schneidenden liegen, und es wird in beiden Fällen von derjenigen Parallelen das grössere Stück abgeschnitten, von welcher der gegebene Punkt am weitesten entfernt ist.

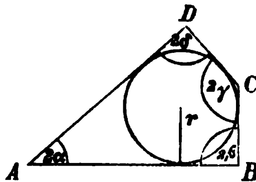
63) Aufg. Wenn alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, so soll die gesuchte Linie so gezogen werden, dass die Summe der Quadrate der abgeschnittenen Stücke ein Min. werde.

Lös. Die abgeschnittenen Stücke sind:

$$\frac{hm(m \pm n)}{m^2 + n^2} \text{ und } \frac{hn(m \pm n)}{m^2 + n^2}.$$

Die Lage der Stücke ist in Bezug auf die gegebene Schneidende dieselbe wie bei der vorigen Aufgabe; jedoch unterscheiden sich in beiden Fällen die gegenwärtigen Resultate von denen in der vorigen Aufgabe dadurch, dass hier auf derjenigen Parallelen das grössere Stück abgeschnitten wird, welcher der gegebene Punkt zunächst liegt.

64) **Aufg.** Unter den Vierecken, welche einen gegebenen Winkel 2α und einen gegebenen Umfang $2s$ haben und zugleich der Bedingung genügen, dass sowohl in als um dieselben ein Kreis beschrieben werden könne, das grösste zu finden.



Lös. Bezeichnet man die Winkel des gesuchten Vierecks mit 2α, 2β, 2γ, 2δ, den Radius des eingeschriebenen Kreises mit r, so hat man infolge der Bedingungen der Aufgabe

$$\gamma = 90^0 - \alpha,\ \delta = 90^0 - \beta,\ r = \frac{s}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}.$$

Die Fläche des Vierecks $I = rs$ wird also ein Max. für denjenigen Wert der unabhängigen Veränderlichen β, für welchen die Funktion $\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$ einen grössten Wert annimmt.

Jede der beiden Seiten, die den Winkel 2α einschliessen, ist $= \frac{s}{1 + \operatorname{tang} \alpha}$, und jede der beiden anderen Seiten $= \frac{s}{1 + \operatorname{cotang} \alpha}$. Zieht man die Diagonale durch die Spitze des Winkels 2α, so entsteht auf jeder Seite dieser Diagonale ein rechtwinkliges Dreieck.

65) **Aufg.** Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Diagonalen p und q haben und einem gegebenen Kreise mit dem Radius r eingeschrieben werden können, das grösste zu finden.

Lös. Zuerst ergibt sich leicht, dass die beiden Diagonalen auf einander senkrecht stehen müssen. Nennt man ferner 2α einen Viereckswinkel, welcher der Diagonale p gegenübersteht und

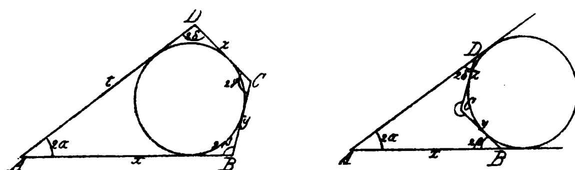
2β den Winkel, der q gegenübersteht, so dass $\sin 2\alpha = \frac{p}{2r}$ und $\sin 2\beta = \frac{q}{2r}$, dann ergeben sich folgende Ausdrücke für die Seiten des Vierecks:

die zwischen 2α und 2β liegende $= 2r \,.\, \cos(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$,
die zunächst an 2β liegende $= 2r \,.\, \sin(\alpha - \beta + \frac{1}{2}R)$,
die zunächst an 2α liegende $= 2r \,.\, \sin(\beta - \alpha + \frac{1}{2}R)$,
die der ersten gegenüberliegende $= 2r \,.\, \sin(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$.

Anmerkung. Noch symmetrischer werden diese Ausdrücke, wenn man die Winkel des Vierecks der Reihe nach 2α, 2β, 2γ, 2δ nennt, wo also $2\gamma = 2R - 2\alpha$ und $2\delta = 2R - 2\beta$ ist. Man erhält dann die Seite,

welche zwischen 2α und 2β liegt $= 2r \,.\, \cos(\alpha + \beta - \frac{1}{2}R)$,
" " 2β " 2γ " $= 2r \,.\, \cos(\beta + \gamma - \frac{1}{2}R)$,
" " 2γ " 2δ " $= 2r \,.\, \cos(\gamma + \delta - \frac{1}{2}R)$,
" " 2δ " 2α " $= 2r \,.\, \cos(\delta + \alpha - \frac{1}{2}R)$,

66) Aufg. Unter allen Vierecken, welche dieselben Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ und denselben Umfang $2s$ haben, das grösste oder kleinste zu finden.



Lös. Bezeichnet man die Eckpunkte des gesuchten Vierecks mit A, B, C, D und zwar so, dass AB und BC den Winkel 2β, BC und CD den Winkel 2γ u. s. w. einschliessen und setzt $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, $DA = t$, so hat man die Funktion $xy \sin B + zt \sin D$ zu einem Max. oder Min. zu machen, während zwischen den Veränderlichen x, y, z, t die Bedingungsgleichungen

$$x - y\cos B + z\cos(A + D) - t\cos A = 0,$$
$$y\sin B + z\sin(A + D) - t\sin A = 0,$$
$$x + y + z + t = 2s$$

bestehen. Wird noch die Grösse $x - y + z - t = 2u$ gesetzt und u als unabhängige Veränderliche betrachtet, so findet man nach

einiger Rechnung $u = 0$ als Bedingung für das Auftreten eines Max. oder Min. Das verlangte Viereck muss daher einem Kreise umschrieben werden können.

Anmerkung 1. Einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes hat Steiner gegeben im Art. 43 der Abhandlung: Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan etc. Crelle's Journal, Bd. XXIV.

Wenn alle Ecken des Vierecks ausspringende sind, wenn also jeder Winkel kleiner als $2R$ ist, so geben die folgenden Ausdrücke der Seiten ein Max., springt aber eine der Ecken ein (mehr als eine Ecke kann aber bekanntlich nicht einspringen), so geben dieselben Werte ein Min. Es werden nun die Seiten, welche zwischen

$$2\alpha \text{ und } 2\beta \text{ liegen} = \frac{s \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin\delta}{\sqrt{\sin(\alpha+\gamma) \,.\, \sin(\alpha+\delta) \,.\, \sin(\beta+\gamma) \,.\, \sin(\beta+\delta)}},$$

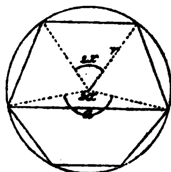
$$2\beta \text{ und } 2\gamma \text{ liegen} = \frac{s \,.\, \sin\delta \,.\, \sin\alpha}{\sqrt{\sin(\beta+\delta) \,.\, \sin(\beta+\alpha) \,.\, \sin(\gamma+\delta) \,.\, \sin(\gamma+\alpha)}},$$

$$2\gamma \text{ und } 2\delta \text{ liegen} = \frac{s \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sqrt{\sin(\gamma+\alpha) \,.\, \sin(\gamma+\beta) \,.\, \sin(\delta+\alpha) \,.\, \sin(\delta+\beta)}},$$

$$2\delta \text{ und } 2\alpha \text{ liegen} = \frac{s \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sqrt{\sin(\delta+\beta) \,.\, \sin(\delta+\gamma) \,.\, \sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha+\gamma)}}.$$

Anmerkung 2. Diese Ausdrücke können einfacher und zwar mit rationalen Nennern dargestellt werden, verlieren aber dann die Symmetrie, welche jetzt, wenn man auf die jeder Seite anliegenden und gegenüberliegenden Winkel achtet, leicht zu erkennen ist.

67a) Aufg. Unter allen Paralleltrapezen, in welchen eine der parallelen Seiten gegeben ist und welche einem gegebenen Kreise mit dem Radius r eingeschrieben werden können, die grössten zu finden.

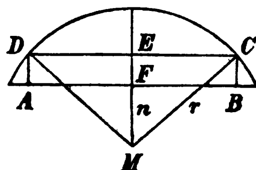


Lös. Denkt man sich die gegebene Seite a als Sehne in den gegebenen Kreis eingetragen, so gibt es, wenn man nur positive Flächen zulässt, in jedem der entstehenden Kreisabschnitte ein grösstes Paralleltrapez, welches erhalten wird, wenn man den zugehörigen Bogen in drei gleiche Teile teilt und die Teilpunkte durch Gerade verbindet. Nennt man den der Sehne a entsprechenden Zentriwinkel

2α, ist also $a = 2r \sin \alpha$, so wird jede der drei anderen Seiten im grösseren Kreisabschnitt $= 2r \sin \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$ und im kleineren $= 2r \sin \frac{1}{3}\alpha$. Die Höhe des ersten Trapezes ist $= 2r \cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\alpha) \times$ $\times \cos(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\alpha)$ und die des zweiten $= 2r \,.\, \sin \frac{1}{3}\alpha \sin \frac{2}{3}\alpha$.

Für die Rechnung ist es zweckmässig, den Zentriwinkel $= 2x$, welcher zu der Sehne gehört, die der gegebenen Sehne a parallel ist, als unabhängige Variable einzuführen.

67b) **Aufg.** In ein gegebenes Kreissegment das grösste Rechteck einzuschreiben.

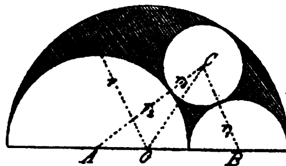


Lös. Der Halbmesser des Kreises, $MD = MC$, sei $= r$, die Entfernung der Sehne des Segmentes vom Mittelpunkte des Kreises, MF, sei $= n$. Die Grundlinie des gesuchten Rechtecks, AB, ist $\sqrt{2r^2 - \frac{1}{2}n^2 + n\sqrt{2r^2 + \frac{1}{4}n^2}}$. Für $n = 0$, ist $AB = r\sqrt{2}$.

67c) **Aufg.** Aus 4 Seiten a, b, c, d ein Viereck von grösstmöglichem Inhalt zu konstruieren.

Lös. Nennt man den Winkel, der von den Seiten a und d gebildet wird, x und den gegenüberliegenden y, so besteht die Bedingung $a^2 + d^2 - 2ad \cos x = b^2 + c^2 - 2bc \cos y$, und der Inhalt des Vierecks wird ein Max., wenn $x + y = 2R$, d. h. wenn das Viereck ein Kreisviereck ist.*)

68) **Aufg.** Über dem Durchmesser eines gegebenen Halbkreises sollen zwei sich berührende Halbkreise und über diesen ein ganzer Kreis beschrieben werden, welcher die drei Halbkreise berührt. Es sollen die Radien der drei neuen Kreise der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der Flächenraum, welcher übrig bleibt, wenn man die Flächen der gesuchten Halbkreise und des ganzen Kreises von der Fläche des gegebenen Halbkreises abzieht, ein Max. oder ein Min. werde.



*) Über die Konstruktion eines solchen Vierecks vergleiche man Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, 1. Teil. Kap. XI. 25. Über Maxima und Minima in der Planimetrie vergleiche man 1. Teil Kap. XII. und über die der Stereometrie 2. Teil. Anhang IX. desselben Lehrbuchs.

Lös. Nennt man den Mittelpunkt des gegebenen Halbkreises O, die Mittelpunkte der beiden gesuchten Halbkreise und des gesuchten Vollkreises beziehungsweise A, B, C und bezeichnet man die zugehörigen Radien mit r, r_1, r_2, r_3, so bestehen bei Einführung der Differenz $r - 2r_1 = x$ als unabhängige Variable die Beziehungen

$$r_1 = \frac{r-x}{2},\ r_2 = \frac{r+x}{2},\ r_3 = r\,\frac{r^2 - x^2}{3r^2 + x^2},$$

von denen die letzte dadurch erhalten wird, dass man den cosinus des Winkels ABC aus den beiden Dreiecken OBC und ABC als Funktion der Seiten berechnet und die gefundenen Werte mit einander vergleicht.

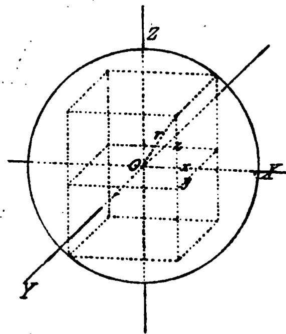
Die in Rede stehende Fläche F erreicht ihren kleinsten oder grössten Wert für diejenigen Werte der unabhängigen Veränderlichen x, für welche der Ausdruck $\frac{x^2}{2} + 2r^2\left(\frac{r^2 - x^2}{3r^2 + x^2}\right)^2$ ein Max. oder Min. wird. Entsprechend den reellen Wurzeln $x = 0$ und $x = \pm 0{,}2892542\ldots r$ der Gleichung $x(x^6 + 9r^2x^4 + 49r^4x^2 - 5r^6) = 0$ wird demnach die Fläche F ein Min. für $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}r$, $r_3 = \frac{1}{3}r$, ein Max. für

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = 0{,}3553729\ldots r,\ \left.\begin{matrix} r_2 \\ r_1 \end{matrix}\right\} = 0{,}6446271\ldots r,\ r_3 = 0{,}2971565\ldots r.$$

Die übrigen vier Wurzeln der angegebenen Gleichung sind imaginär.

(Vergl. C. W. Baur, Schlömilchs Zeitschr. für Math. und Phys. 1860, S. 369.)

69) **Aufg.** Es soll das grösste rechtwinklige Parallelepipedum gefunden werden, welches einer Kugel von gegebenem Radius r eingeschrieben werden kann,



a) wenn die Grundfläche ein Quadrat sein soll,

b) wenn die Grundfläche ein Rechteck mit einer gegebenen Seite $= a$ sein soll.

Lös. a) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

b) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{8}a^2}$.

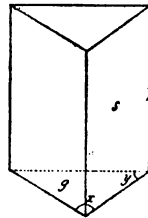
70) **Aufg.** Unter den Parallelepipeden, welche denselben kubischen Inhalt, eine gleiche Kante und eine gleiche Ecke haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Wenn der kubische Inhalt $= J$ ist, die gegebene Kante $= r$, die drei ebenen Winkel, welche die gegebene Ecke bilden, α, β, γ, so dass α und β die Kante r zum gemeinschaftlichen Schenkel haben, so wird bekanntlich das Lot, welches vom Endpunkt der Kante r auf die gegenüberliegende Ebene gefällt wird, wenn man noch $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$ setzt:

$$\frac{2r}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}.$$

Wenn man die hier vorkommende Wurzelgrösse durch R bezeichnet, so werden die Werte der beiden anderen Kanten des Parallelepipeds, welches der in der Aufgabe gestellten Bedingung genügt: $\sqrt{\frac{J.\sin\alpha}{2r.R.\sin\beta}}$ und $\sqrt{\frac{J.\sin\beta}{2r.R.\sin\alpha}}$, wovon die erste den Winkeln β und γ, die zweite den Winkeln α und γ zum gemeinschaftlichen Schenkel dient. — Es ergibt sich hierbei, dass die beiden an der Kante r liegenden Seitenflächen an Flächeninhalt gleich sind.

71) **Aufg.** Unter allen geraden dreiseitigen Prismen, deren Höhe $= h$, Grundfläche $= g$ und eine Seitenfläche $= s$ ist, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.



Lös. Diejenige Seite der Grundfläche, auf welcher die gegebene Seitenfläche steht, ist offenbar $= \frac{s}{h}$. Nennt man die beiden dieser Seite anliegenden Winkel der Grundfläche x und y, so besteht die Bedingungsgleichung $g = \frac{s^2}{h^2}\cdot\frac{\sin x\sin y}{2\sin(x+y)}$, und es ist die Funktion $\frac{\sin x + \sin y}{\sin(x+y)}$ zu einem Min. zu machen. Das Min. tritt ein für $x = y$, d. h. die beiden nicht gegebenen Seitenflächen des gesuchten Prismas sind kongruent.

72a) **Aufg.** Unter allen geraden Zylindern von gleichem kubischen Inhalt J denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Zylinders wird $= \sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$ und seine Höhe $= 2\sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$, d. h. die Höhe ist dem Durchmesser der Grundfläche gleich. Der Zylinder kann also einem Würfel eingeschrieben werden.

72b) **Aufg.** Unter allen geraden Zylindern von gleichem kubischen Inhalte J denjenigen zu finden, dessen Mantel vermehrt um eine der Grundflächen ein Min. wird.

Lös. Der Halbmesser der Grundfläche $= \sqrt[3]{\frac{J}{\pi}}$, die Höhe des Zylinders wird ebenso gross.

73) **Aufg.** Unter allen geraden Zylindern von gleicher Oberfläche F denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Durchmesser der Grundfläche wird $= 2\sqrt{\frac{F}{6\pi}}$, und die Höhe des Zylinders wird ebenso gross.

74) **Aufg.** Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt I denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Mantel hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $= \sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, die Höhe $= \sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$, die Seitenlinie $= \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, so dass sich das Quadrat des Radius der Grundfläche, zum Quadrat der Höhe, zum Quadrat der Seite $= 1:2:3$ verhält.

75) **Aufg.** Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt I denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, Höhe und Seitenlinie sind $\sqrt{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, $2\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi}}$, $3\sqrt[3]{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, so dass also die Seitenlinie des Kegels das Dreifache vom Radius der Grundlinie ist.

76) **Aufg.** Unter allen geraden Kegeln von gleichem Mantel M denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, die Höhe und die Seite sind $= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{M}{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2M}{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{3M}{\pi}}$, und es verhalten sich ihre Quadrate zu einander wie $1:2:3$.

77) **Aufg.** Unter allen geraden Kegeln von gleicher Oberfläche F denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche, die Höhe und Seite sind $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $\sqrt{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$. Die Seite ist das Dreifache von dem Radius der Grundfläche.

78) **Aufg.** Unter allen Kugelabschnitten von dem kubischen Inhalt I die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, für welchen die gesamte Oberfläche (Kalotte nebst begrenzender Kreisfläche) ein Max. wird.

Lös. Der Radius r der zugehörigen Kugel wird $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6I}{\pi}}$ und die Höhe des Abschnitts $= 2r$, d. h. der Abschnitt ist die Kugel selbst mit dem Radius r.

79) **Aufg.** Unter allen Kugelabschnitten mit der gegebenen gesamten Oberfläche $= F$, die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der verlangte Kugelabschnitt wird eine vollständige Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

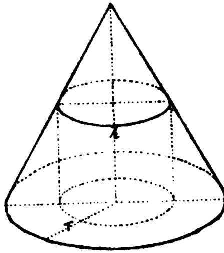
80) **Aufg.** Unter allen Kugelausschnitten von dem kubischen Inhalt I denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche ein Max. oder Min. wird.

Lös. Wenn der Radius r der Kugel $= \sqrt[3]{\frac{15J}{2\pi}}$ und die Höhe h des zugehörigen Kugelabschnittes $= \frac{1}{5}r$, so findet ein Min. statt; ist dagegen $r = h = \sqrt[3]{\frac{3J}{2\pi}}$, so erhält man die Halbkugel als Max.

81) **Aufg.** Unter allen Kugelausschnitten mit der gesamten Oberfläche $= F$ denjenigen zu finden, dessen kubischer Inhalt ein Max. oder Min. ist.

Lös. Wenn r und h die nämliche Bedeutung haben, wie in der vorigen Aufgabe, so ergibt die Rechnung ein Max. für $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$, $h = \frac{1}{2} r$, ein Min. für $r = h = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}$. Man erhält demnach, abgesehen von der absoluten Grösse, die nämlichen Kugelausschnitte, wie in der vorigen Aufgabe; nur tritt hier ein Max. ein, wo dort ein Min. war und umgekehrt.

82) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Zylinder einzuschreiben.



Lös. Wenn der Radius der Grundfläche des Kegels $= r$, die Höhe des Kegels $= h$ ist, so wird der Radius der Grundfläche des gesuchten Zylinders $= \frac{2}{3} r$, und seine Höhe $= \frac{1}{3} h$.

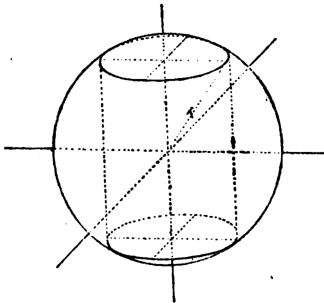
83) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Zylinder einzuschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

Lös. Bei derselben Bezeichnung wie in der vorigen Aufgabe wird der Radius der Grundfläche des Zylinders $= \frac{1}{2} r$ und seine Höhe $= \frac{1}{2} h$.

84) Aufg. In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Zylinder einzuschreiben, dessen gesamte Begrenzungsflächen ein Max. bilden.

Lös. Unter der Voraussetzung, dass $h > r$, werden Radius der Grundfläche und Höhe des Zylinders $\frac{rh}{2(h-r)}$ und $\frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$.

85) Aufg. In eine gegebene Kugel, mit dem Radius r, den seinem kubischen Inhalt nach grössten Zylinder einzuschreiben.



Lös. Der Radius der Grundfläche $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$, die Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

86) Aufg. In eine gegebene Kugel einen Zylinder einzuschreiben, dessen krumme Oberfläche ein Max. ist.

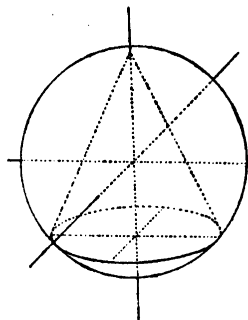
Lös. Der Radius der Grundfläche $= r\sqrt{\frac{1}{2}}$, die Höhe $= r\sqrt{2}$.

87) **Aufg.** In eine gegebene Kugel einen Zylinder einzuschreiben, dessen gesamte Begrenzungsfläche ein Max. wird.

Lös. Der Radius der beiden Endflächen des Zylinders ist $= r\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$ und seine Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$, wobei die oberen Zeichen den oberen, die unteren den unteren entsprechen. Der Durchmesser der Grundkreise eines dieser Zylinder ist also gleich der Höhe des anderen. Zieht man vom Mittelpunkt der Kugel Gerade nach je einem Punkte der beiden Grundkreise, so ergänzen sich die spitzen Winkel, welche von denselben mit der Axe des Zylinders gebildet werden, zu 90^0.

Zusatz. Legt man durch die Axe des Zylinders eine Ebene, so erhält man als Durchschnitt derselben mit der Zylinderfläche und der Kugel ein dem grössten Kreise der Kugel eingeschriebenes Rechteck von dem Inhalte $4r^2\sqrt{\frac{1}{5}}$. Dieses Rechteck lässt sich leicht in den Kreis einschreiben. Teilt man nämlich dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so ist die Höhe jedes dieser Dreiecke, welche zur Grundlinie $2r$ haben, $= \sqrt{2r \cdot \frac{2}{5}r}$, welcher Ausdruck leicht zu konstruieren ist.

88) **Aufg.** In eine gegebene Kugel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Kegel einzuschreiben.



Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $= \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ und seine Höhe $= \frac{4}{3}r$.

89) **Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

Lös. Derselbe Kegel, wie in der vorigen Aufgabe.

90) **Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, dessen gesamte Begrenzung ein Max. ist.

Lös. Die Höhe des Kegels wird

$$= \frac{1}{16}r(23 - \sqrt{17}) = r \cdot 1{,}179806\ldots,$$

der Radius der Grundfläche

$$= \frac{1}{16}r\sqrt{190 + 14\sqrt{17}} = r \cdot 0{,}983702\ldots$$

Für die Rechnung eignet sich die Höhe des Kegels als unabhängige Variable.

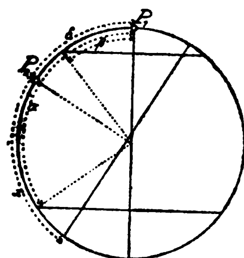
91) **Aufg.** Unter allen sphärischen Dreiecken mit einem gegebenen Winkel α (welcher $< \pi$ sein soll) und einem gegebenen Flächeninhalt a dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

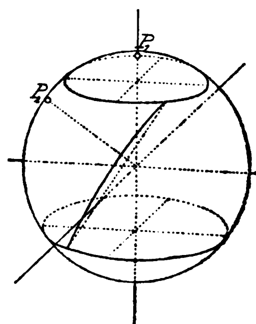
Lös. Die beiden anderen Winkel werden unter einander gleich und zwar jeder $= \frac{1}{2}(a + \pi - \alpha)$. Die dem Winkel α gegenüberliegende Seite erhält dann für ihren cosinus den Ausdruck $\frac{\cos\alpha + [\cos\frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)]^2}{[\sin\frac{1}{2}(a+\pi-\alpha)]^2}$, welcher als cosinus < 1 sein muss, woraus sich die Bedingung ergibt $a \overline{\overline{<}}\, 2\alpha$. Der cosinus jeder der beiden anderen Seiten $=$ cotang $\frac{1}{2}\alpha$. cotang $\frac{1}{2}(a + \pi - \alpha)$.

92) **Aufg.** Unter allen sphärischen Dreiecken von einem gegebenen Flächeninhalt $= a$ dasjenige zu finden, dessen Umfang ein Min. ist.

Lös. Wie gross man sich auch den einen Winkel des gesuchten Dreiecks denken mag, immer müssen die beiden anderen Winkel unter einander gleich sein. Hier ergibt sich, dass alle drei Winkel unter einander gleich sein müssen und zwar jeder $= \frac{1}{3}(a + \pi)$ und ebenso auch alle Seiten einander gleich, und zwar wird die Sekante der Hälfte jeder Seite $= 2 \sin\frac{1}{6}(a + \pi)$.

93) **Aufg.** Auf einer Kugel sind zwei Parallelkreise gegeben, sowie auch der Pol eines dritten die beiden ersten schneidenden Kreises; es soll dieser dritte so bestimmt werden, dass die Sehne in ihm, welche seine Durchschnittspunkte mit den beiden gegebenen Kreisen verbindet, ein Max. sei.





Lös. Denkt man sich durch den bekannten Pol der beiden gegebenen Parallelkreise und durch den gegebenen Pol des ge-

suchten dritten Kreises einen grössten Kugelkreis gelegt, so werden zur Bestimmung der gegenseitigen Lage in diesem folgende Bogen bekannt sein: 1) der Bogen zwischen dem gemeinsamen Pol der Parallelkreise und dem ersten Parallelkreise $= \beta$, 2) der Bogen zwischen demselben Pol und dem zweiten $= \alpha$, wobei $\alpha > \beta$ sein soll, und 3) der Bogen zwischen demselben Pol und dem gegebenen Pol des gesuchten dritten Kreises $= \delta$. Man nenne nun den Bogen zwischen dem zweiten gegebenen Pol und seinem zugehörigen gesuchten dritten Kreis $= x$.

Damit überhaupt von einer reellen Sehne die Rede sein kann, deren Endpunkte auf den Parallelkreisen liegen und von dem zweiten Pole gleich weit entfernt sind, darf $\sin \delta$ nicht kleiner sein als $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. 1) Ist $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) > \sin \delta > \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, so ergibt sich für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \cos \delta$ ein Max. der Sehne $= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \delta}$ ein Min. der Sehne $= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \delta}$. 2) Ist $\sin \delta > \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, so ergibt sich wieder für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \cos \delta$ ein Max. der Sehne $= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, dagegen für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cos \delta$ ein Min. der Sehne $= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

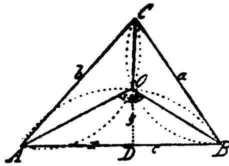
94a) Aufg. In eine gegebene Kugel soll das grösstmögliche Parallelepipedum eingeschrieben werden.

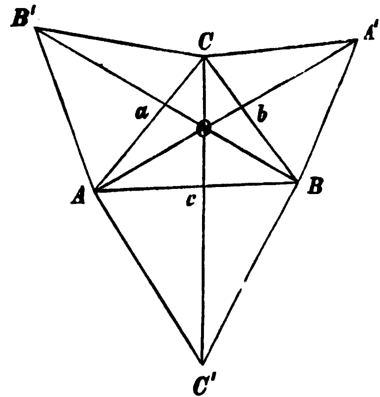
Lös. Wenn r der Radius der Kugel ist, so wird jede der drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelepipedums $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

94b) Aufg. In ein gegebenes Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ das Parallelepipedum von grösstem Volumen einzuschreiben.

Lös. Die Kanten des Parallelepipeds werden $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$ und das gesuchte Volumen ist $= \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

95) **Aufg. Zu drei gegebenen Punkten soll in derselben Ebene ein vierter gefunden werden, so dass die Summe der Entfernungen desselben von den drei ersten ein Min. werde.**





Lös. Die drei gegebenen Punkte bestimmen ein Dreieck, dessen Winkel A, B, C und die gegenüberliegenden Seiten respektive a, b, c sein mögen. Bezieht man den gesuchten Punkt O durch rechtwinkelige Koordinaten auf AB als Abszissenaxe und A als Anfangspunkt, so wird die Summe $OA + OB + OC$ ausgedrückt durch die Funktion

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + [(c-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + [(x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ergibt dann leicht als Bedingung eines Min. der Funktion u die Beziehung $\angle AOD + \angle BOD = 120^0$, wo D den Fusspunkt des von O auf AB gefällten Lotes bezeichnet. Wenn man daher über jeder der drei Seiten a, b, c einen Kreisbogen beschreibt, der einen Winkel von $\frac{4}{3} R$ als Peripheriewinkel enthält, so schneiden sich diese Bogen in einem einzigen und zwar in dem gesuchten Punkte.

In anderer Weise gelangt man zum Ziele, wenn man über jeder Dreieckseite das entsprechende gleichseitige Dreieck konstruiert, und zwar müssen die Spitzen derselben, A', B', C' nach aussen gerichtet sein. AA', BB', CC' schneiden sich dann in O.

Die einzelnen Linien, welche von dem gesuchten Punkte nach den Ecken des Dreiecks gezogen werden, erhalten folgende Werte:

$$\frac{b \,.\, c \,.\, \sin(60^0 + A)}{\sin 60^0 \,.\, \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos(60^0 + A)}},$$

$$\frac{c \,.\, a \,.\, \sin(60^0 + B)}{\sin 60^0 \,.\, \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \,.\, \cos(60^0 + B)}},$$

$$\frac{a \,.\, b \,.\, \sin(60^0 + C)}{\sin 60^0 \,.\, \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos(60^0 + C)}}.$$

Die Summe aller drei Linien, welche ein Min. wird, ist

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \sin 60^0 \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

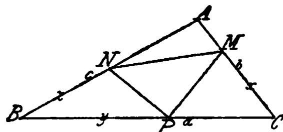
Besitzt das Dreieck einen Winkel, der grösser ist als 120^0, so schneiden sich die drei Kreisbogen nicht. Die beiden Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ können dann nicht gleichzeitig bestehen. Da nun die gestellte Aufgabe immer eine Lösung zulässt und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ für jeden der Punkte A, B, C die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird in diesem Falle, wie leicht einzusehen, derjenige der gegebenen Punkte zugleich der verlangte sein, welcher der Scheitel des stumpfen Winkels ist.

(Vergl. Bertrand, Journal de Liouville, t. VIII.)

96) Aufg. Zu vier gegebenen Punkten soll ein fünfter von der Beschaffenheit gefunden werden, dass die Summe der Entfernungen desselben von den ersten ein Min. wird.

Lös. Durch ein Verfahren, das dem in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen ganz analog ist, findet man den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen des Vierecks, welches durch die vier gegebenen Punkte bestimmt ist.

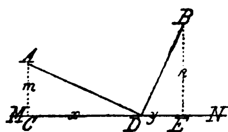
97) Aufg. Auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC sollen drei Punkte M, N, P gefunden werden, so dass das Dreieck MNP ein Max. oder Min. werde.



Lös. Betrachtet man $MC = x$, $PB = y$, $NB = z$ als unabhängige Veränderliche und bezeichnet F eine Funktion von x, y, z, welche

für jede bestimmte Wertegruppe der unabhängigen Veränderlichen den Flächeninhalt des Dreiecks MNP ausdrückt, so sind $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{c}{2}$ diejenigen Werte, welche gleichzeitig den drei Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ genügen. Das diesen Werten entsprechende Dreieck wird erhalten, wenn man die Mitten der Seiten AB, AC und BC durch Gerade verbindet. Sein Flächeninhalt ist $= \frac{1}{4} \triangle ABC$. Die Untersuchung der vollständigen Änderung von F zeigt aber, dass dieses Dreieck weder ein Min., noch ein Max. ist. Dies lässt sich auch leicht geometrisch erkennen. Denkt man sich nämlich den Punkt M, die Mitte von AB, festgehalten, so wird bei dem ausgezeichneten Dreieck $\angle PMC = \angle A$, $\angle NMA = \angle C$. Jedes andere Dreieck, welches seinen Scheitel in demselben Punkt M hat, bei welchem aber die Winkel PMC und NMA beide zugleich grösser oder beide zugleich kleiner als A und B sind, wird kleiner als das Dreieck MNP sein; dagegen jedes Dreieck mit demselben Scheitel, bei welchem PMC grösser oder kleiner als A und NMA kleiner oder grösser als C ist, wird grösser als das ausgezeichnete Dreieck MNP.

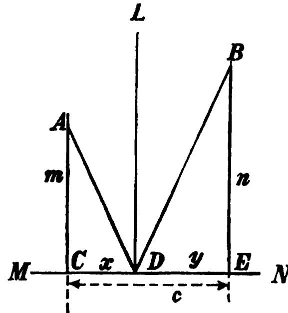
98a) Aufg. Auf einer gegebenen Linie MN einen Punkt D zu finden, so dass die Verbindungslinien mit zwei auf derselben Seite von MN liegenden gegebenen Punkten A und B ein Min. zur Summe haben.



Lös. Es heissen m und n die senkrechten Abstände AC und BE der Punkte A und B von MN, es sei ferner $CD = x$, $DE = y$, $CE = c$, so wird für ein Min. von $AD + DB : x : y = m : n$ und $\triangle ADC \sim \triangle BDN$.

Zusatz. Denkt man sich A als einen Licht aussendenden Punkt, MN als spiegelnde Fläche, die Ebene der Zeichnung als Einfallsebene und sucht den Weg desjenigen von A ausgehenden Lichtstrahles, der nach der Reflexion durch B geht, so ist wegen der Gleichheit der Winkel ADM und BDN nach dem Reflexions-

gesetz klar, dass der gesuchte Weg mit $A\,D\,B$ zusammenfällt. Somit ist der Weg, den das Licht zurücklegt, um bei einmaliger



Spiegelung von A nach B zu kommen, der kürzeste Weg zwischen diesen Punkten, der überhaupt bei Berührung der spiegelnden Fläche möglich ist.

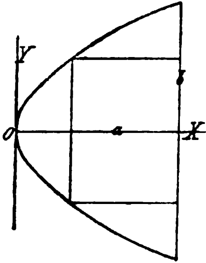
98b) Aufg. Auf den drei Seiten eines Dreiecks $A\,B\,C$ sollen drei Punkte M, N und P gefunden werden, so dass der Umfang des Dreiecks $M\,N\,P$ ein Min. wird.

Lös. Bei der nämlichen Bedeutung der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, wie in Aufg. 97, bezeichne u diejenige Funktion von x, y, z, welche für jede bestimmte Wertegruppe der unabhängigen Veränderlichen den Umfang des Dreiecks $M\,N\,P$ ausdrückt. Die geometrische Interpretation der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ergibt $\cos A\,M\,N = \cos C\,M\,P$ u. s. f. Fällt man daher von den drei Endpunkten des gegebenen Dreiecks Lote auf die Gegenseiten, dann werden die Verbindungslinien der Fusspunkte derselben das gesuchte Dreieck bilden. — Dieses ist aber nur möglich, wenn alle drei Winkel des gegebenen Dreiecks spitze sind; in anderen Fällen aber erhält man weder ein Max. noch ein Min.

99) Aufg. Durch einen in der Axe einer Parabal gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.

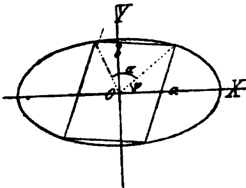
Lös. Die auf der Axe senkrecht stehende Sehne wird die kleinste.

100) **Aufg.** In ein Parabelsegment, welches durch eine auf der Axe senkrecht stehende Sehne abgeschnitten wird, soll das grösste Rechteck eingeschrieben werden.



Lös. Wenn a die Entfernung der gegebenen Sehne vom Scheitel und b die halbe Sehne ist, so sind $\frac{2}{3} a$ und $\frac{2}{3} b \sqrt{3}$ die beiden Seiten des gesuchten Parallelogramms, dessen Flächeninhalt $\frac{4}{9} \sqrt{3}\, a\, b$ ein Max. ist.

101) **Aufg.** Zwei Durchmesser einer Ellipse schneiden sich unter einem gegebenen spitzen Winkel α, man soll ihre Grösse und Lage so bestimmen, dass das Parallelogramm, dessen Diagonalen sie sind, ein Max. oder Min. werde.

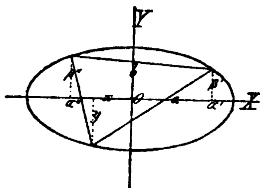


Lös. Sei a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellipse. Betrachtet man den Winkel φ, den der eine Durchmesser mit der grossen Axe bildet, als unabhängige Variable, so findet sich in dem Falle, wo $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha < \frac{b}{a}$ ist, ein Max. für $\varphi = -\frac{1}{2} \alpha$ und ein Min. für $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, und zwar ist der Flächeninhalt des grössten Parallelogramms $= \frac{4\, a^2 b^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}$ und derjenige des kleinsten $= \frac{4\, a^2 b^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}$. Die Parallelogramme sind Rechtecke und liegen symmetrisch zur grossen und kleinen Axe der Ellipse. Ist dagegen $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha > \frac{b}{a}$ oder $\cos \alpha < \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, so treten Minima ein für $\varphi = -\frac{1}{2} \alpha$, $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ und Maxima für

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \arccos\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \cos \alpha\right)\right].$$

In dem Grenzfalle $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{b}{a}$ erreicht die Fläche wieder für $\varphi = -\frac{1}{2} \alpha$ ihren grössten und für $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ ihren kleinsten Wert und zwar ist ersterer $= 2\, a\, b$, letzterer $= \frac{4\, a^3 b^3}{a^4 + b^4}$.

102) Aufg. In der Peripherie einer Ellipse sind zwei Punkte gegeben; man soll einen dritten so bestimmen, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks ein Max. oder Min. wird.

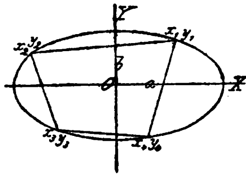


Lös. Wenn der erste Punkt durch die rechtwinkligen Koordinaten α' und β', der zweite durch α'' und β'' gegeben ist, wenn ferner a die halbe grosse und b die halbe kleine Axe der Ellipse bedeutet, so dass ihre Gleichung wird $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; dann wird die Abszisse des dritten Endpunktes des gesuchten Dreiecks

$$= \frac{\pm a^2(\beta' - \beta'')}{\sqrt{a^2(\beta' - \beta'')^2 + b^2(\alpha' - \alpha'')^2}},$$

wozu natürlich je zwei gleiche und entgegengesetzte Werte der Ordinate gehören, so dass vier Dreiecke erhalten werden.

103a) Aufg. In eine gegebene Ellipse soll das grösste Viereck eingeschrieben werden.



Lös. Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte des gesuchten Vierecks der Reihe nach mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4, so führt die Methode der unbestimmten Multiplikatoren auf Bestimmungsgleichungen für $x_1, y_1; \ldots,$ die nicht von einander unabhängig sind, woraus folgt, dass es unendlich viele grösste Vierecke gibt. Da sich ferner zeigt, dass $x_3 = -x_1$, $y_3 = -y_1$; $x_4 = -x_2$, $y_4 = -y_2$; $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ sein muss, so sind diese Vierecke Parallelogramme, die erhalten werden, wenn man die Endpunkte konjugierter Durchmesser durch Gerade mit einander verbindet. Der Flächeninhalt eines jeden solchen Vierecks ist demnach $= 2\,a\,b$.

103b) Aufg. In eine gegebene Ellipse soll das grösste Parallelogramm eingeschrieben werden, welches einen gegebenen spitzen Winkel α enthält.

Lös. Nach der vorhergehenden Aufgabe werden die Diagonalen des gesuchten Parallelogramms konjugierte Durchmesser sein, und man hat daher nur noch die Aufgabe zu lösen, diese konjugierten Durchmesser so zu bestimmen, dass das Parallelogramm, dessen Diagonalen sie sind, den gegebenen Winkel α enthält. Ist die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, so sind die Koordinaten der Eckpunkte des verlangten Parallelogramms

1) $x_1=+a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$; $y_1=+b\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$;

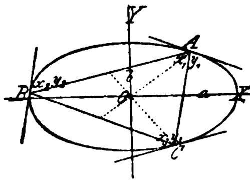
2) $x_2=-a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$; $y_2=-b\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$;

3) $x_3=-a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$; $y_3=+b\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$;

4) $x_4=+a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$; $y_4=-b\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{ab}{a^2-b^2}\operatorname{cotang}\alpha}$.

Aus diesen Werten folgt noch beiläufig, dass es für α einen Grenzwert gibt, dass nämlich immer $\operatorname{tang}\alpha \geqq \frac{2ab}{a^2-b^2}$ sein muss.

104) Aufg. In eine gegebene Ellipse soll das grösste Dreieck eingeschrieben werden.



Lös. Ist die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, und bezeichnet man die Koordinaten der Eckpunkte des gesuchten Dreiecks ABC der Reihe nach mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, so folgt aus demselben Grunde, wie in Aufg. 103a), dass es unendlich viele der Ellipse eingeschriebene, grösste Dreiecke gibt. Die Gleichung der Sehne BC ist

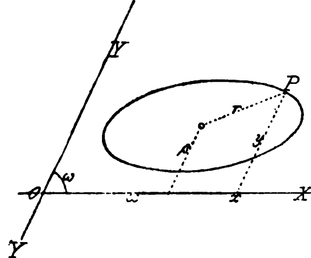
$$y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)=-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}(x-x_2);$$

demnach ist diese Sehne der im Punkte A an die Ellipse gelegten Tangente parallel. Ebenso findet sich, dass die Sehne AB der Tangente in C und die Sehne AC der Tangente in B parallel ist. Alle diese Dreiecke haben denselben Flächeninhalt $=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,ab$, und der Mittelpunkt der Ellipse ist ihr gemeinsamer Schwerpunkt.

105a) **Aufg.** Man bestimme den Flächeninhalt der Ellipse

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0,$$

wo α und β die Koordinaten des Mittelpunktes bedeuten.



Lös. Bezeichnet man den Koordinatenwinkel mit ω und die Koordinaten irgend eines Ellipsenpunktes mit x und y, so sind die Halbaxen a und b dieser Ellipse resp. das Max. und Min. des Abdrucks

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega},$$

und der Flächeninhalt der Ellipse ist bekanntlich $= a\,b\,\pi$. Zur Bestimmung des Produktes $a\,b$ hat man daher, wenn man noch den unbestimmten Multiplikator λ einführt, die Funktion

$$F = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega + \\ + \lambda\,[A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1]$$

zu einem Max. oder Min. zu machen. Multipliziert man die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ mit $x-\alpha$, die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ mit $y-\beta$ und addiert, so erkennt man, dass für den Fall eines Maximums oder Minimums $\lambda = r^2$ wird. Drückt man aus der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $x-\alpha$ durch $y-\beta$ und λ aus und setzt den erhaltenen Wert in $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ein, so kommt man auf die quadratische Gleichung:

$$(AC - B^2)\,\lambda^2 + (A + C - 2B\cos\omega)\,\lambda + \sin^2\omega = 0.$$

Diese ergibt $\lambda_1\,\lambda_2 = a^2\,b^2 = \frac{\sin^2\omega}{AC-B^2}$, und daher ist der gesuchte Flächeninhalt $= \frac{\pi\sin\omega}{\sqrt{AC-B^2}}$.

105b) **Aufg.** Man bestimme den Kubikinhalt des auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Ellipsoids

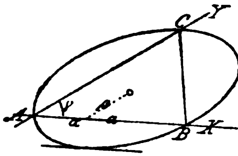
$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{23}\,y\,z + 2\,a_{13}\,x\,z + 2\,a_{12}\,x\,y - a_{00} = 0.$$

Lös. Auf analoge Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe erhält man für den gesuchten Kubikinhalt

$$\frac{\frac{4}{3}\,\pi\,a_{00}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}^2 - a_{22}\,a_{13}^2 - a_{33}\,a_{12}^2 + 2\,a_{12}\,a_{13}\,a_{23}}}.$$

Die kubische Gleichung für λ erhält man hier am einfachsten, wenn man die aus der Determinantentheorie bekannte Bedingung des Zugleichbestehens der drei Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$ aufstellt.

106) Aufg. Um ein gegebenes Dreieck soll die ihrem Flächeninhalte nach kleinste Ellipse beschrieben werden.



Lös. Das Dreieck ABC sei gegeben durch zwei Seiten $AB=a$, $AC=b$ und den eingeschlossenen Winkel γ. Wählt man die Geraden AB und AC beziehungsweise zur Abszissen- und Ordinatenaxe eines schiefwinkligen Axensystems, so kann die Gleichung der Ellipse geschrieben werden

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=0,$$

wo α und β die Koordinaten des Mittelpunktes bedeuten. Die drei Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die Ellipse durch die drei Punkte $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=b$; $x=a$, $y=0$ geht, ergeben

$$A=-\frac{2\beta-b}{\alpha(\alpha b+\beta a-ab)},\quad B=\frac{(2\alpha-a)(2\beta-b)}{2\alpha\beta(\alpha b+\beta a-ab)},$$
$$C=-\frac{2\alpha-a}{\beta(\alpha b+\beta a-ab)}.$$

Nach Aufg. 105a) ist der Flächeninhalt der Ellipse $=\frac{\pi\sin\gamma}{\sqrt{AC-B^2}}$, und man hat daher nur noch α und β so zu bestimmen, dass

$$AC-B^2=\frac{(2\beta-b)(2\alpha-a)(2\alpha b+2\beta a-ab)}{4\alpha^2\beta^2(\alpha b+\beta a-ab)^2}$$ zu einem Max. wird. Man findet

$$\alpha=\frac{a}{3},\ \beta=\frac{b}{3},\ A=-\frac{3}{a^2},\ B=-\frac{3}{2ab},\ C=-\frac{3}{b^2}.$$

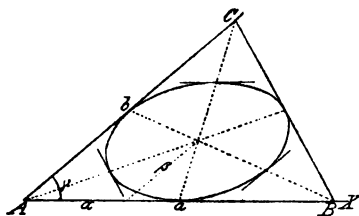
Der Flächeninhalt der kleinsten umschriebenen Ellipse ist demnach $=\frac{4}{9}\sqrt{3}\,\pi\,ab\sin\gamma$, ihr Mittelpunkt liegt im Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkligen Halbaxen werden

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)}+\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}$$
und
$$\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)}-\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}.$$

107) **Aufg.** In ein gegebenes Dreieck soll die grösste Ellipse eingeschrieben werden.

Lös. Wenn die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe beibehalten werden und die Gleichung der gesuchten Ellipse wieder

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + \\ + C(y-\beta)^2 + 1 = 0$$



ist, so folgen aus der Bedingung, dass die Ellipse die drei Geraden $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ berühre, die Werte

$$A=\frac{4\beta^2}{N},\quad B=\frac{2(2\alpha b+2\beta a-2\alpha\beta-ab)}{N},\quad C=\frac{4\alpha^2}{N},$$

wo $N=(2\alpha b+2\beta a-2\alpha\beta-ab)^2-4\alpha^2\beta^2$.

Der weitere Gang der Rechnung ist dem in der vorhergehenden Aufgabe angedeuteten ganz analog. Der Flächeninhalt der grössten eingeschriebenen Ellipse findet sich $=\frac{1}{18}\sqrt{3}\,\pi\, a\, b\,.\sin\gamma$, ihr Mittelpunkt ist wieder der Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkligen Halbaxen werden

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{2}\,.\sqrt{a^2+b^2-ab\,.\cos\gamma+\sqrt{(a^2+b^2-ab\,.\cos\gamma)^2-3a^2b^2\,.\sin^2\gamma}}\,,$$

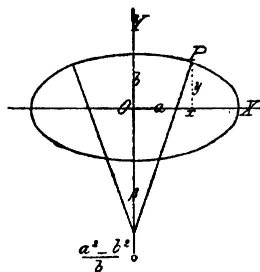
$$\tfrac{1}{6}\sqrt{2}\,.\sqrt{a^2+b^2-ab\cos\gamma-\sqrt{(a^2+b^2-ab\cos\gamma)^2-3a^2b^2\sin^2\gamma}}\,.$$

Die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der drei Seiten.

108) **Aufg.** Die grösste Ellipse zu bestimmen, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt.

(Man sehe die betreffende Abhandlung von Gauss, Monatl. Korrespondenz von Zach, Bd. XXII, Seite 112.)

109) **Aufg.** Für welche Ellipsenpunkte ist der Abstand derselben von dem Punkte $x=0$, $y=-\beta$ der kleinen Axe ein Max. oder Min.?



Lös. Sind $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ die Koordinaten eines Punktes der Ellipse, so hat man den Ausdruck

$$a^2\cos^2\varphi+(b\sin\varphi+\beta)^2$$

su einem Max. oder Min. zu machen. Zunächst erkennt man, dass die gesuchten

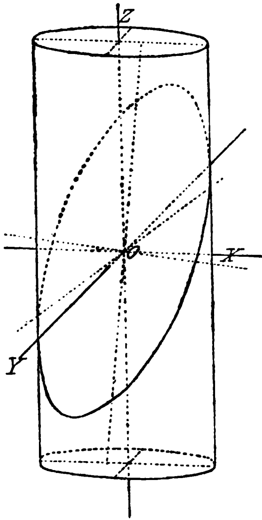
Punkte auf den Normalen liegen müssen, welche von dem gegebenen Punkte an die Ellipse möglich sind. Sodann findet sich

1) wenn $\beta > \frac{a^2 - b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Max. und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.,

2) wenn $\beta < \frac{a^2 - b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Min., für $\varphi = \arcsin \frac{b\beta}{a^2 - b^2}$ und für $\varphi = \pi - \arcsin \frac{b\beta}{a^2 - b^2}$ Maxima und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.,

3) wenn $\beta = \frac{a^2 - b^2}{b}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein Max. und für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ein Min.

Da $x = 0$, $y = \frac{a^2 - b^2}{b}$ die Koordinaten eines Punktes sind, welcher der Ellipsenevolute angehört, so ergibt sich also, dass von dem gegebenen Punkte zwei, drei zusammenfallende und eine vierte verschiedene oder endlich vier von einander verschiedene Normalen möglich sind, je nachdem derselbe ausserhalb, auf oder innerhalb der Evolute der Ellipse liegt. Der Winkel φ kann mittelst der Gleichung $\sin\varphi = \frac{b\beta}{a^2 - b^2}$ leicht konstruiert werden.



110a) Aufg. Der elliptische Zylinder $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ werde von der Ebene $\frac{1}{4}x - y - \frac{1}{3}z = 0$ geschnitten. Man bestimme für die Schnittellipse die Richtung und Länge der Halbaxen a und b, sowie die Koordinaten $x_1, y_1, z_1; \ldots$ der vier Scheitel.

Lös. Setzt man $f = x^2 + y^2 + z^2$, $\varphi = x^2 + 4y^2 - 1$, $\psi = \frac{1}{4}x - y - \frac{1}{3}z$, so hat man die absoluten Maxima und Minima der Funktion $F = f - \lambda\varphi - 2\mu\psi$ aufzusuchen. Hierbei bestimmen sich die Grössen x, y, z, λ, μ aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\varphi = 0$ und $\psi = 0$. Es ergibt sich

λ	μ	x	y	z
$+\frac{13}{4}$	$+\frac{18}{\sqrt{13}}$	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$	$+\frac{3}{2\sqrt{13}}$	$-\frac{6}{\sqrt{13}}$
$+\frac{13}{4}$	$-\frac{18}{\sqrt{13}}$	$+\frac{2}{\sqrt{13}}$	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	$+\frac{6}{\sqrt{13}}$
$+\frac{13}{16}$	$+\frac{9}{4\sqrt{13}}$	$+\frac{3}{\sqrt{13}}$	$+\frac{1}{\sqrt{13}}$	$-\frac{3}{4\sqrt{13}}$
$+\frac{13}{16}$	$-\frac{9}{4\sqrt{13}}$	$-\frac{3}{\sqrt{13}}$	$-\frac{1}{\sqrt{13}}$	$+\frac{3}{4\sqrt{13}}$

$$a=\sqrt{\lambda_1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{13},\quad b=\sqrt{\lambda_2}=\tfrac{1}{4}\sqrt{13}.$$

Werden die Winkel, welche die Axen der Ellipse mit den Koordinatenaxen einschliessen, beziehungsweise mit α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 bezeichnet, so folgt

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 4 : -3 : 12,$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = 12 : 4 : -3.$$

110b) **Aufg.** Man löse die nämliche Aufgabe für die Ellipse, in welcher der elliptische Zylinder $\frac{x^2}{12\,.\,13}+\frac{y^2}{9\,.\,13}=1$ von der Ebene $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y-z=0$ geschnitten wird.

Lös. Man findet

λ	μ	x	y	z
$+13^2$	$+4$	-12	-3	-4
$+13^2$	-4	$+12$	$+3$	$+4$
$+\frac{3}{4}\,.\,13^2$	$+\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$+2\sqrt{3}$	$-6\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$
$+\frac{3}{4}\,.\,13^2$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$+6\sqrt{3}$	$+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$$a=\sqrt{\lambda_1}=13,\quad b=\sqrt{\lambda_2}=\frac{13\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 13 : 3 : 4,$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_3 = -4 : 12 : 3.$$

110c) Aufg. Man löse dieselbe Aufgabe für die Ellipse, in welcher das Ellipsoid $2x^2+5y^2+z^2=1$ von der Ebene $\frac{1}{4}x-y-\frac{1}{3}z=0$ geschnitten wird.

Lös. Es wird

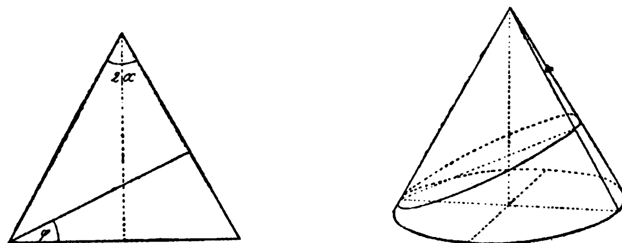
λ	μ	x	y	z
$+\frac{13}{17}$	$+\frac{144}{17\sqrt{13.17}}$	$-\frac{4}{\sqrt{13.17}}$	$+\frac{3}{\sqrt{13.17}}$	$-\frac{12}{\sqrt{13.17}}$
$+\frac{13}{17}$	$-\frac{144}{17\sqrt{13.17}}$	$+\frac{4}{\sqrt{13.17}}$	$-\frac{3}{\sqrt{13.17}}$	$+\frac{12}{\sqrt{13.17}}$
$+\frac{13}{29}$	$+\frac{144}{29\sqrt{13.29}}$	$+\frac{12}{\sqrt{13.29}}$	$+\frac{4}{\sqrt{13.29}}$	$-\frac{3}{\sqrt{13.29}}$
$+\frac{13}{29}$	$-\frac{144}{29\sqrt{13.29}}$	$-\frac{12}{\sqrt{13.29}}$	$-\frac{4}{\sqrt{13.29}}$	$+\frac{3}{\sqrt{13.29}}$

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\tfrac{13}{17}},\quad b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\tfrac{13}{29}};$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = 4 : -3 : 12,$$

$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = 12 : 4 : -3.$$

111) Aufg. Es ist die grösste Ellipse zu bestimmen, die erhalten werden kann, indem man einen gegebenen geraden Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, welche durch einen gegebenen festen Punkt des Kegels geht.



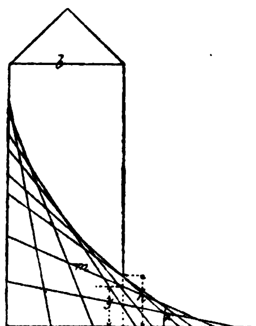
Lös. Bezeichnet man den Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Basisebene mit φ, den Winkel des Kegels mit 2α, so muss

$$\sin 2\varphi = 2 \sin 2\alpha$$

sein, woraus hervorgeht, dass ein Max. nur dann existiert, wenn $2\alpha < 30^0$ ist.

112) Aufg. In einen viereckigen Turm, dessen Tiefe b ist, will man einen Balken von der Länge m ($m > b$) hineinschaffen. Welche Höhe h muss die Türe des Turmes wenigstens haben, wenn Seitenbewegung des Balkens ausgeschlossen ist?

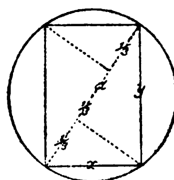
Lös. Man denke sich den Balken so bewegt, dass seine Enden beziehungsweise auf der inneren Rückwand des Turmes und auf dem Erdboden gleiten. Jede Lage, die der Balken hierbei annehmen kann, bedingt eine gewisse Höhe y der Türe des Turmes. Bezeichnet x den Neigungswinkel des Balkens gegen den Erdboden, so wird $y = m \sin x - b \operatorname{tang} x$. Offenbar ist die gesuchte kleinste Höhe der Türe gleich dem Max. von y, d. h. es ist



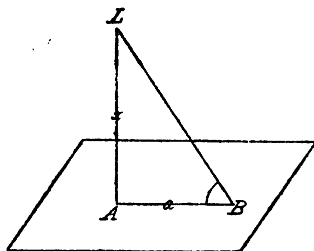
$$h = (m^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \text{ oder } h^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}.$$

113) Aufg. Aus einem runden Baumstamme den Balken von der grössten relativen Kohäsionskraft auszuschneiden.

Lös. Heisst die Breite des Balkens x, die Höhe y, so hängt nach dem Gesetze der Mechanik die Grösse der Kohäsion ab von $x y^2$. Das Max. dieses Produktes findet statt für $x = d\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn d der Durchmesser des runden Baumstammes ist. Die geometrische Konstruktion ergibt sich hiernach leicht.*)



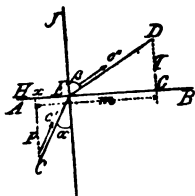
114) Aufg. In welcher Höhe über einem in einer Ebene liegenden Punkt A muss ein Licht L von der Intensität i angebracht werden, damit ein in derselben Ebene liegender Punkt B möglichst hell erleuchtet werde?



Lös. Die Lichtstärke hängt ab von dem Ausdruck $\frac{i \sin LBA}{(LB)^2}$. Heisst daher a die Entfernung des Punktes B von A, so muss das Licht in der Höhe $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ über A angebracht werden.

*) Über dieselbe Aufgabe vergleiche man: Heis Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra § 108. 22.

115) **Aufg.** Ein Körper bewegt sich von einem Punkte C zu einem Punkte D über eine gerade Linie AB hinweg und zwar von C zur Linie AB mit der Geschwindigkeit c' und von AB zu D mit der Geschwindigkeit c''. Wie ist der Punkt E auf der Linie AB zu wählen, damit die auf Zurücklegung des Weges CED verwandte Zeit ein Min. werde?

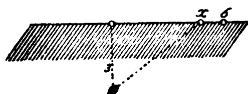


Lös. Es seien die Entfernungen CH und DG der Punkte C und D von AB mit p und q bezeichnet, $GH = m$, $HE = x$, so ist

$$\frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} : \frac{m - x}{\sqrt{q^2 + (m - x)^2}} = c' : c''.$$

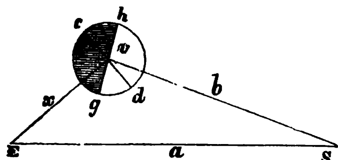
Heissen die Winkel, welche die Linien CE und ED mit dem auf AB in E errichteten Lote EI bilden, α und β, so ist $\sin\alpha : \sin\beta = c' : c''$. (Man vergleiche das Gesetz über die Brechung der Lichtstrahlen, sowie bei 98a) das Gesetz über Zurückwerfung derselben.)

116) **Aufg.** Ein Mann, der sich mit einem Boote in einer Entfernung von 3 Meilen (engl.) vom nächsten Punkte des Ufers befindet, wünscht einen zweiten Punkt am Ufer, der vom ersten 5 Meilen entfernt ist, in kürzester Zeit zu erreichen. Wenn nun der Mann in der Stunde 5 Meilen weit gehen, aber nur 4 Meilen weit rudern kann, so wird gefragt, wo er landen müsse.



Lös. Eine Meile vor dem zu erreichenden Orte.

117) **Aufg.** Bei welcher Stellung erscheint Venus, unter der Voraussetzung, dass die Bahn des Planeten eine kreisförmige ist, am hellsten?



Lös. Es befinde sich die Sonne in S, die Erde in E, Venus in v, $SE = a$, $Sv = b$, $Ev = x$, der Radius der Venus $= \varrho$. Es stehe der Durchmesser gh senkrecht auf Sv, und der Durchmesser cd senkrecht auf Ev.

Die für die Erde sichtbare Lichtphase bestimmt sich aus dem Winkel $g\,v\,d = 180^0 - E\,v\,S$, und ist

$$= \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 - \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 \cos g\,v\,d = \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 (1 + \cos E\,v\,S).$$

Die Helligkeit der Venus steht im geraden Verhältnisse mit $1 + \cos E\,v\,S$ und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse mit x. Setzt man

$$1 + \cos E\,v\,S = \frac{x^2 + b^2 + 2\,b\,x - a^2}{2\,b\,x},$$

so wird die Helligkeit ein Max. für das Max. von $\frac{(x+b)^2 - a^2}{x^3}$, hieraus: $x = -2b + \sqrt{b^2 + 3a^2}$. Setzt man $a = 1$, $b = 0{,}7233317$, so ergibt sich

$$x = 0{,}430358,\quad \angle g\,v\,d = 62^0\,4'\,23{,}2'',\quad \angle S\,E\,v = 39^0\,43'\,28{,}2''$$

(Elongation der Venus). Bei einer synodischen Umlaufszeit der Venus von 584 Tagen gehört zu der angegebenen Elongation eine Zeit von 64 Tagen. Das grösste Licht der Venus hat also im Mittel 64 Tage vor und nach der unteren Konjunktion mit der Sonne statt.

118) Aufg. Welche Werte der Veränderlichen x, y, z machen die Funktion

$$F = x^3 + 3\sqrt{2}\,.\,x^2 z + 3\,x\,z^2 + \sqrt{5}\,.\,y^3 + 3\sqrt{5}\,.\,y\,z^2 + \\ + \sqrt{2}\,.\,z^3 - 3\,x - 3\sqrt{5}\,.\,y - 3\sqrt{2}\,.\,z + \text{Const.}$$

zu einem Max. oder Min., und welche erteilen ihr Sattelwerte?

Lös. Maxima treten ein für die Wertegruppen $-1, -1, 0$; $0, 0, -1$, Minima für $1, 1, 0$; $0, 0, 1$ und Sattelwerte für $1, -1, 0$; $-1, 1, 0$; $\frac{5}{\sqrt{7}}, \sqrt{\tfrac{5}{7}}, -\sqrt{\tfrac{2}{7}}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}, -\sqrt{\tfrac{5}{7}}, \sqrt{\tfrac{2}{7}}$.

119) Aufg. Man beantworte dieselben Fragen für die Funktion

$$F = x^3 + 3\,x^2 y + 3\,x^2 z + 3\,x\,y^2 + 3\,x\,z^2 - 18\,x\,y\,z + y^3 + \\ + 3\,y^2 z + 3\,y\,z^2 + z^3 - 3\,x - 3\,y - 3\,z + \text{Const.}$$

Lös. Für die Wertegruppe $1, 1, 1$ tritt ein Min., für $-1, -1, -1$ ein Max. ein, und die 6 Wertegruppen $1, 0, 0$; $-1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, -1, 0$; $0, 0, 1$; $0, 0, -1$ ergeben Sattelwerte.

120) Aufg. Es ist dieselbe Aufgabe zu lösen für die Funktion

$$F = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 z + 3xz^2 - y^3 + \tfrac{3}{2}y^2 z - 3yz^2 - \\ - 3x + 3y + \text{Const.}$$

Lös. Ein Min. tritt ein für die Wertegruppe 1, —1, 0, ein Max. für —1, 1, 0. Die Gruppen 1, 1, 0; —1, —1, 0; 0, 0, 1; 0, 0, —1; 1, 1, 1; —1, —1, —1 liefern Sattelwerte.

Kapitel VIII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung ebener Kurven.

§ 22.

Eine ebene Kurve kann dadurch auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen werden, dass man entweder 1) die Koordinaten eines beliebigen Punktes derselben als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t darstellt,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

oder 2) eine Gleichung zwischen x und y festsetzt

$$F(x, y) = 0,$$

welcher die Koordinaten eines jeden Kurvenpunktes genügen müssen oder 3) die Ordinate eines beliebigen Kurvenpunktes als Funktion der Abszisse ausdrückt,

$$y = f(x).$$

Hierbei kann man sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch die Elimination der Grösse t aus den Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ und die Gleichung $y = f(x)$ durch die Auflösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ nach y entstanden denken.

Tangente und Normale. Entsprechend diesen drei Formen erhält man für die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die geometrische Tangente der Kurve in irgend einem Punkte x, y mit der positiven X-Axe bildet, die Ausdrücke

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels β, den die Normale der Kurve mit der positiven X-Axe bildet, ist

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} = -\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Trägt man demnach von dem Punkte x, y aus in der Richtung der X-, resp. Y-Axe die Strecken (Komponenten) $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ oder 1 und $f'(x)$ auf, so liefert die Diagonale des hierdurch bestimmten Rechtecks (Resultierende) der Richtung und Länge nach die zugehörige Tangente. Im Falle die Gleichung der Kurve in der Form $F(x, y) = 0$ gegeben ist, empfiehlt es sich, zunächst die Normale der Kurve zu konstruieren, deren Komponenten in dem soeben angedeuteten Sinn $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ sind. Die Resultierende fällt hierbei in denjenigen Teil der Ebene, in welchem die Funktion $F(x, y)$ positive Werte besitzt.

Wird das Bogendifferential mit ds bezeichnet, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und man erhält ferner

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte x, y der Kurve wird, wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bedeuten,

$$\frac{\xi - x}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\dfrac{dy}{dt}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Die Gleichung der durch den Punkt x, y gehenden Normale ist

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) = 0,$$

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x).$$

Man nennt Tangente und Normale im engeren Sinne oder schlechtweg Tangente und Normale diejenigen Stücke der gleichbenannten, unbegrenzten Geraden, welche zwischen dem Berührungspunkt der Tangente und der X-Axe liegen. Die Projektionen dieser Stücke auf die X-Axe heissen entsprechend Subtangente und Subnormale. Führt man für diese vier Grössen T, N, S_t und S_n ein, so erhält man

$$T = \frac{y}{\sin\alpha} = y\,\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial x}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\,\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial y}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

$$S_t = y \operatorname{cotang}\alpha = y\,\frac{dx}{dy} = -y\,\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},$$

$$S_n = y \operatorname{tang}\alpha = y\,\frac{dy}{dx} = -y\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Parallelkurven. Wenn man sich in allen Punkten einer gegebenen Kurve $F(x, y) = 0$ die Normalen gezogen und auf diesen vorwärts oder rückwärts von dem betreffenden Punkt eine konstante Länge k abgetragen denkt, so erhält man dadurch Punkte der äusseren oder inneren Parallelkurve.

Wird der Winkel, den die Tangente im Punkte x, y der gegebenen Kurve mit der positiven X-Axe bildet, mit α bezeichnet, so findet man für die Koordinaten ξ, η des entsprechenden Punktes der Parallelkurve

$$\xi = x \mp k \sin\alpha, \quad \eta = y \pm k \cos\alpha.$$

Gelingt es, aus diesen beiden Gleichungen die Veränderlichen mit Hülfe der gegebenen Kurvengleichung zu eliminieren, so ist die resultierende Gleichung zwischen ξ und η die Gleichung der Parallelkurve.

Fusspunktkurven. Fällt man von einem festen Punkte A aus Lote auf sämtliche Tangenten einer ebenen Kurve, so bilden deren Fusspunkte eine neue Kurve, welche die Fusspunktkurve der gegebenen Kurve für den Punkt A als Pol genannt wird. Sämtliche Lote sind natürlich, was für die Rechnung wesentlich ist, den betreffenden Normalen parallel.

Ist die Gleichung der ursprünglichen Kurve in rechtwinkligen Koordinaten $F(x, y) = 0$, so findet man die Gleichung ihrer Fusspunktkurve allgemein durch Elimination von x und y aus den Gleichungen

$$X = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2},$$

$$Y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

Asymptoten. Eine Tangente der Kurve, dessen Berührungspunkt unendlich weit entfernt ist, die selbst aber nicht ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt, heisst eine Asymptote der Kurve.

Die Gleichung einer Asymptote wird im allgemeinen in einer der beiden Formen geschrieben werden können

$$y = mx + n, \quad x = \mu y + \nu,$$

und es bestimmen sich m, n, μ, ν aus den Gleichungen

$$m = \lim_{(x=\infty)} \frac{y}{x}, \quad n = \lim_{(x=\infty)} (y - mx);$$

$$\mu = \lim_{(y=\infty)} \frac{x}{y}, \quad \nu = \lim_{(y=\infty)} (x - \mu y).$$

Ist die Kurve eine algebraische vom n ten Grade, so kann ihre Gleichung, wenn man in u_k alle homogenen Glieder k ter Ordnung zusammenfasst, in die Form gebracht werden

$$F(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0.$$

Die Gleichung der Tangente einer solchen Kurve ist dann

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + p = 0,$$

wo

$$p = -\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) = -(u_1 + 2u_2 + \ldots + (n-1)u_{n-1} + nu_n),$$

$$0 = nF = nu_0 + nu_1 + \ldots + nu_{n-1} + nu_n,$$

was durch Addition ergibt

$$p = nu_0 + (n-1)u_1 + \ldots + 2 \,.\, u_{n-2} + 1 \,.\, u_{n-1}.$$

Ausgehend von dieser Form der Tangentengleichung, in welcher x und y nur noch im $(n-1)$ ten Grade erscheinen, können die Asymptoten einer Kurve n ten Grades auf folgende Weise gefunden werden: Man bestimme die n Werte von $\frac{y}{x}$, welche der Gleichung $\frac{u_n}{x^n} = 0$ genügen, behalte hierauf in der vorstehenden Tangentengleichung nur die Glieder $(n-1)$ ter Ordnung in x und y bei und setze, nachdem man noch durch x^{n-1} dividiert hat, für das Verhältnis $\frac{y}{x}$ der Reihe nach die gefundenen Werte in die resultierende Gleichung ein. Jede solche Substitution ergibt dann im allgemeinen die Gleichung einer Asymptote der Kurve.

In manchen Fällen gestattet folgende Modifikation des angegebenen Verfahrens eine rasche Bestimmung der Asymptoten einer algebraischen Kurve: Setzt man in der gegebenen Gleichung n ten Grades $y = zx$ und dividiert dieselbe durch x^n, so wird sie im allgemeinen folgende Form annehmen:

$$\varphi(z) + \frac{1}{x}\varphi_1(z) + \frac{1}{x^2}\varphi_2(z) + \ldots = 0.$$

Wenn nun $\frac{y}{x} = z$ für $x = \infty$ einer endlichen Grenze m zustrebt, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung

$$\lim \varphi(z) = \varphi(m) = 0.$$

Substituiert man hierauf

$$z = m + \frac{t}{x}$$

in die obige Gleichung und entwickelt die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$ nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{x}$, multipliziert die sich ergebende Gleichung mit x und macht $x = \infty$, so erhält man eine Beziehung zwischen m und $n = \lim_{(x=\infty)} t = \lim_{(x=\infty)} (y - mx)$, aus welcher sich für jedes bestimmte m im allgemeinen ein bestimmter Wert für n ergibt. Die Gleichung der betreffenden Asymptote lautet dann $y = mx + n$.

Den hier angegebenen Methoden liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Gleichung, aus welcher die Grenzwerte des Verhältnisses $\frac{y}{x} = z$ zu bestimmen sind, keine mehrfachen Wurzeln besitze. Aus dem Angedeuteten ist jedoch leicht ersichtlich, wie die Untersuchung in denjenigen Fällen weiter zu führen wäre, wo in den Gleichungen $\frac{u^n}{x^n} = 0$ und $\varphi(m) = 0$ mehrfache Wurzeln auftreten.

Höchste und tiefste Punkte. Für einen aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmten Wert $x = x_0$ erreicht die Ordinate der Kurve $y = f(x)$ einen grössten oder kleinsten Wert, je nachdem die erste der folgenden Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$, welche für $x = x_0$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung und negativ oder von gerader Ordnung und positiv ist; dagegen tritt weder ein Maximum, noch ein Minimum ein, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist.

Konvexität und Konkavität. Eine Kurve ist im Punkte x, y nach der positiven Seite der Y-Axe konkav oder konvex, je nachdem für diesen Punkt $\frac{d^2 y}{d x^2} \gtrless 0$ ist.

Unter dem Kontingenzwinkel einer Kurve versteht man den Winkel, den zwei benachbarte Tangenten, also auch zwei benachbarte Normalen der Kurve mit einander bilden; er ist gleich dem Differential $d\alpha$ des Winkels α, den die Tangente mit der positiven X-Axe einschliesst.

Man findet für rechtwinklige Koordinaten

$$\frac{d\alpha}{ds}=\cos^2\alpha\frac{d(\operatorname{tang}\alpha)}{ds}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Berührung der Kurven. Wenn zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkte noch eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, so berühren sie sich in diesem Punkte. Die Art der Berührung kann jedoch eine sehr mannigfache sein. Beschreibt man in dem betrachteten Punkte einen Kreisbogen mit dem an der Grenze unendlich kleinen Radius r und bezeichnet dasjenige Stück desselben, welches zwischen den gegebenen Kurven liegt, mit σ, so kann man das Verhältnis $\frac{\sigma}{r}$ nach steigenden Potenzen von r entwickeln, wodurch man etwa erhalten wird

$$\frac{\sigma}{r}=A\,r^n+B\,r^{n+n'}+\ldots$$

Man nennt nun Ordnung der Berührung oder des Kontaktes der beiden Kurven in dem betrachteten Punkte den niedrigsten in der obigen Entwickelung auftretenden Exponenten von r.

In dem Falle, wo die als Funktionen der Abszisse betrachteten Ordinaten beider Kurven in der Nähe des gemeinschaftlichen Punktes eine Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatz gestatten, erhält diese Definition folgenden, für die unmittelbare Anwendung geeigneten Ausdruck: Zwei Kurven gehen in einem bestimmten Punkte, welcher für keine derselben ein singulärer ist, einen Kontakt n ter Ordnung mit einander ein, wenn für diesen Punkt die Ordinate und die n ersten Ableitungen $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}$ für beide Kurven gleich sind, während die $(n+1)$ ten Ableitungen verschiedene Werte haben. Dabei haben die Kurven $(n+1)$ benachbarte Punkte mit einander gemein und schneiden sich in dem betreffenden Punkte gegenseitig oder berühren sich, ohne einander zu schneiden, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die beiden Kurven gemeinsame Tangente nicht parallel der Y-Axe sei.

Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkte x, y hat ausser dem Punkte x, y im allgemeinen noch zwei benachbarte Punkte mit der Kurve gemein. Sein Radius ϱ heisst der

Krümmungsradius und sein Mittelpunkt der **Krümmungsmittelpunkt.** Der letztere kann auch als der Durchschnitt zweier benachbarten Normalen betrachtet werden. Einige der gebräuchlichsten Ausdrücke für den Krümmungsradius in rechtwinkligen Koordinaten sind:

$$\varrho = \frac{ds}{da} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}} =$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}}.$$

Wird x als unabhängige Veränderliche betrachtet, so ist

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und für die Form $F(x, y) = 0$ der Kurvengleichung wird

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt x, y mit X, Y, so ist

$$X = x - \varrho\frac{dy}{ds}, \qquad Y = y + \varrho\frac{dx}{ds},$$

oder

$$X = x - \frac{dy}{dx}\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Evolute und Evolvente. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heisst die Evolute (développée) der gegebenen Kurve, während die gegebene Kurve selbst die **Evolvente** (développante) der letzteren genannt wird. Sind die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes der gegebenen Kurve durch eine dritte Veränderliche t ausgedrückt, so werden auch die

Koordinaten X und Y eines Punktes der Evolute im allgemeinen als Funktionen derselben Veränderlichen erscheinen. Gelingt es, in diesem letzteren Falle die Grösse t, oder in dem Falle, wo x die unabhängige Veränderliche ist, mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Kurve die Grössen x und y zu eliminieren, so erhält man eine Gleichung zwischen X und Y für die Evolute.

Die Normale der Evolvente ist zugleich Tangente der Evolute. Ferner folgt aus der leicht zu beweisenden Gleichung $d\varrho = \sqrt{dX^2 + dY^2}$, dass die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute gleich dem Unterschied der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungsradien der Evolvente ist. Man kann sich daher die Evolvente entstanden denken durch Abwickelung eines unausdehnbaren Fadens, welcher in jeder seiner Lagen Tangente an die Evolute ist.

Wenn die Gleichung der Evolute gegeben ist, so findet man für den dem Punkte X, Y entsprechenden Punkt der Evolvente die Gleichungen

$$x = X - S\frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S\frac{dY}{dS},$$

wo S die Bogenlänge der Evolute bezeichnet, gezählt von dem Punkte an, in welchem die Abwickelung beginnt, bis zu dem Punkte X, Y. Können mit Hülfe der Evolutengleichung die Grössen X und Y eliminiert werden, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y für die Evolvente.

Singuläre Punkte. Diejenigen Punkte, in welchen die Kurve von der Konvexität zur Konkavität übergeht und umgekehrt, heissen Inflexions- oder Wendepunkte. Für einen aus der Gleichung $f''(x) = 0$ bestimmten Wert a von x tritt jedesmal ein Wendepunkt ein, wenn von den Ableitungen $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ etc. die erste für $x = a$ nicht verschwindende von ungerader Ordnung ist. Die Tangente in einem Wendepunkte (Wendetangente) hat daher mit der Kurve stets eine ungerade Anzahl (wenigstens drei) benachbarte Punkte gemein und schneidet die Kurve. In einem solchen Punkte ist der Krümmungsradius unendlich gross, und man kann somit in manchen Fällen zur Bestimmung der Wendepunkte einer Kurve eine der Gleichungen benutzen, die erhalten werden, indem man die Nenner der verschiedenen Ausdrücke für ϱ gleich Null setzt.

Ein Punkt, in welchem sich zwei oder mehrere Zweige einer Kurve schneiden, heisst ein Doppelpunkt, resp. ein mehrfacher Punkt der Kurve. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve und wird vorausgesetzt, es lasse sich die Funktion $F(x, y)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln, wo x_0 und y_0 zwei beliebige spezielle Werte der Veränderlichen x und y bedeuten, so kann nach dem Taylor'schen Satze geschrieben werden

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + (x - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} + (y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} + 2(x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0, y_0} +\right.$$

$$\left. + (y - y_0)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0}\right] + \ldots = 0.$$

Wenn dann $F(x_0, y_0) = 0$ ist, so ist der Punkt x_0, y_0 ein Punkt der Kurve, und die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung

$$(x - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} + (y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = 0.$$

Hat man ausserdem noch $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 0$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = 0$, so ist der Punkt x_0, y_0 ein Doppelpunkt. Jede Gerade durch den Doppelpunkt kann in gewissem Sinne als Tangente angesehen werden; die Kurve besitzt aber ausserdem im allgemeinen noch zwei eigentliche Tangenten, welche beide zugleich durch die Gleichung

$$(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} + 2(x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_{x_0, y_0} +$$

$$+ (y - y_0)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} = 0$$

dargestellt werden.

Ihre trigonometrischen Tangenten sind:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)}.$$

Je nachdem die beiden so bestimmten Tangenten reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sind, ist der Punkt x_0, y_0 ein gewöhnlicher Doppelpunkt, ein Rückkehrpunkt (Spitze), sofern in diesem Punkte nicht Selbstberührung der Kurve stattfindet, oder ein isolierter oder konjugierter Punkt (Einsiedler). Verschwinden für $x = x_0$, $y = y_0$ auch noch die zweiten Ableitungen, so ist der Punkt ein dreifacher, und die gleich Null gesetzten Glieder dritter Ordnung ergeben die zugehörigen Tangenten. U. s. f.

Das Auftreten eines singulären Punktes ist daher im allgemeinen an die Bedingung geknüpft, dass gleichzeitig

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sei. Genügen die Werte x_0, y_0 diesen drei Gleichungen, so lässt sich das Verhalten der Kurve im Punkte x_0, y_0 auf folgende Weise ermitteln: Man denkt sich den Punkt x_0, y_0 mit einem kleinen Kreise vom Radius ϱ umgeben und bestimmt die Punkte, welche dieser Kreis mit der zu untersuchenden Kurve gemein hat, d. h. man setzt in die Gleichung der Kurve $F(x, y) = 0$

$$x = x_0 + \varrho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \varrho \sin \varphi$$

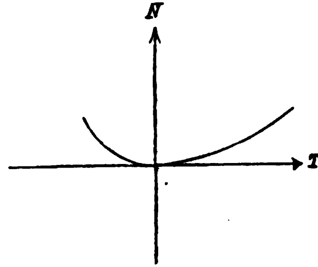
und sucht diejenigen Werte von φ, für welche $F(\varrho, \varphi)$ verschwindet. Dabei wird es im allgemeinen hinreichen, nur die Glieder niedrigster Dimension in ϱ, welche nicht identisch verschwinden, zu berücksichtigen. Die Anzahl und gegenseitige Lage dieser gemeinsamen Punkte lässt dann im allgemeinen beim Übergang zu einem unendlich kleinen ϱ die Natur der Kurve in diesem Punkte erkennen.

Zur Bestimmung der Gestalt singulärer Kurvenelemente kann in manchen Fällen auch folgende Methode mit Vorteil angewendet werden: Wenn x_0, y_0 die Koordinaten des singulären Punktes sind, so denke man sich die Tangente in diesem Punkte zur Abszissenaxe und die Normale zur Ordinatenaxe eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt und entwickle x und y nach steigenden Potenzen einer dritten unabhängigen Veränderlichen t, so dass man etwa erhält:

$$x - x_0 = a\,t^m + a_1\,t^{m+1} + \ldots,$$
$$y - y_0 = b\,t^n + b_1\,t^{n+1} + \ldots,$$

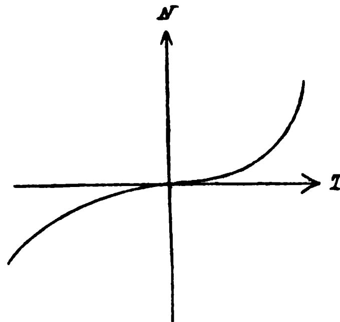
wo $n > m$ ist und a und b von Null verschieden vorausgesetzt werden. Dann können vier Fälle eintreten:

1) Wenn m eine ungerade und n eine gerade Zahl ist, so liegt in der Nähe des Punktes x_0, y_0 die Kurve auf derselben



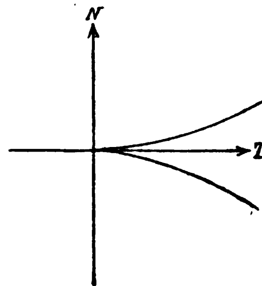
Seite der Tangente und auf beiden Seiten der Normale, und die Singularität besteht darin, dass die Tangente mit der Kurve einen Kontakt von höherer als der ersten Ordnung bildet.

2) Wenn m und n ungerade Zahlen sind, so liegt die Kurve



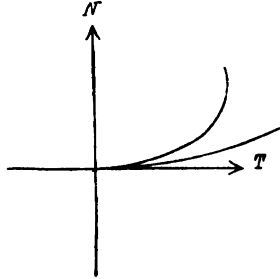
zu beiden Seiten sowohl der Tangente, als der Normale, und der Punkt x_0, y_0 ist ein Wendepunkt.

3) Ist m eine gerade, n aber eine ungerade Zahl, so liegt die Kurve auf beiden Seiten der Tangente, aber auf derselben



Seite der Normale. Die Kurve bildet in diesem Falle im Punkte x_0, y_0 eine Spitze erster Art.

4) Wenn endlich m und n gerade sind, so liegt die Kurve sowohl auf derselben Seite der Tangente, als auch auf derselben



Seite der Normale, und besitzt in dem betrachteten Punkte eine Spitze zweiter Art oder einen Schnabel.

Polarkoordinaten. Wenn die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten $F(r, \varphi) = 0$ oder $r = f(\varphi)$ gegeben ist, so erhält man leicht sämtliche bisher angeführten Grössen mittelst der Transformationsformeln

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

wobei r den Leitstrahl (Radius vector) und φ den Polarwinkel bedeutet. Es ist z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi \dfrac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \dfrac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \dfrac{d^2 r}{d\varphi^2}}{\left(\cos \varphi \dfrac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi\right)^3}.$$

Ferner wird das Bogendifferential

$$ds = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2},$$

der Kontingenzwinkel

$$d\alpha = d\varphi + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 d \frac{r\, d\varphi}{dr},$$

der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\varphi + \left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 d \dfrac{r\, d\varphi}{dr}} = \frac{\left(\dfrac{ds}{d\varphi}\right)^3}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \dfrac{d^2 r}{d\varphi^2}}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\cos\varphi - \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\cdot\left[r\cos\varphi+\sin\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}\right]}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}},$$

$$Y = r\sin\varphi - \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\cdot\left[r\sin\varphi-\cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}\right]}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Für die Untersuchung einer auf Polarkoordinaten bezogenen Kurve ist es häufig zweckmässig, den Winkel ϑ in Betracht zu ziehen, den der Leitstrahl eines Punktes mit der durch den Punkt an die Kurve gezogenen Tangente bildet. Es ist

$$\vartheta = \alpha - \varphi,\quad d\vartheta = d\alpha - d\varphi,$$

$$\sin\vartheta = \frac{r\,d\varphi}{ds},\quad \cos\vartheta = \frac{dr}{ds},\quad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Errichtet man auf den Leitstrahl im Pole eine Senkrechte, welche die Tangente und die Normale der Kurve schneidet, so erhält man, entsprechend den Bezeichnungen für Parallelkoordinaten, indem man an Stelle der X-Axe die erwähnte Senkrechte setzt, die Polartangente, — normale, — subtangente, — subnormale.

Es ist

$$\mathfrak{S}_t = r^2\frac{d\varphi}{dr},\qquad \mathfrak{S}_n = \frac{dr}{d\varphi},$$

$$\mathfrak{T} = r\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2},\quad \mathfrak{N} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

Wenn dem Werte $\varphi = \alpha$ ein unendlich grosser Leitstrahl r entspricht, so besitzt die Kurve eine diesem Leitstrahl parallele Asymptote, falls für $\varphi = \alpha$ die Subtangente $\frac{r^2\,d\varphi}{dr}$ einen endlichen Wert behält.

§ 23. Beispiele.

1. Allgemeine Aufgaben.

a) Tangenten und Normalen.

1) **Aufg.** Es ist zu zeigen, dass das Stück der Tangente an die Kurve
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$
welches zwischen den beiden Koordinatenaxen liegt, die konstante Länge a hat.

2) **Aufg.** Welche Bedingung muss zwischen ε und ε_1 bestehen, damit die Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1, \text{ wo } \varepsilon < 1,$$
und die Hyperbel
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{A^2(\varepsilon_1^2 - 1)} = 1, \text{ wo } \varepsilon_1 > 1,$$
sich unter rechten Winkeln schneiden?

Lös. Es muss $a\varepsilon = A\varepsilon_1$, d. h. die beiden Kegelschnitte müssen konfokal sein.

3) **Aufg.** Betrachtet man in der Gleichung
$$y = Ce^{-2px} + \frac{x^2}{2p} - \frac{x}{2p^2} + \frac{1}{4p^3}$$
C als variablen Parameter, so soll für die durch diese Gleichung dargestellte Kurvenschar der Ort der Punkte bestimmt werden, in welchen die Tangenten der X-Axe parallel sind.

Lös. Der gesuchte Ort ist die Parabel $x^2 = 2py$.

4) **Aufg.** Auf welcher Kurve liegen die Punkte, in denen die Tangenten an die einzelnen Kurven der durch die Gleichung
$$y = Ce^{x} + \frac{\sin x + \cos x}{2} - 1$$
dargestellten Kurvenschar mit der positiven X-Axe einen Winkel von 45^0 einschliessen?

Lös. Der gesuchte geometrische Ort ist die Kurve $y = \sin x$.

5) **Aufg.** Wenn eine Kurve A längs einer zweiten Kurve B in derselben Ebene rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt irgend ein mit der Kurve A fest verbundener Punkt eine **Rolllinie** oder **Roulette**.

Es soll gezeigt werden, dass die Normale in einem beliebigen Punkte der Roulette durch den entsprechenden Berührungspunkt der Kurven A und B geht. (Descartes.)

6) Aufg. Es ist der Satz zu beweisen: Bei reziproken Kurven sind, wenn man den Pol als Ursprung eines Polarkoordinatensystems nimmt, die Winkel, die ein Leitstrahl mit den Tangenten in seinen Schnittpunkten mit den beiden Kurven bildet, Supplementwinkel.

Lös. Ist eine Kurve durch ihre Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ gegeben, so ist bekanntlich die Gleichung der reziproken Kurve:

$$\psi = \varphi, \quad \varrho = \frac{R^2}{r}, \quad \text{oder } \varrho = \frac{R^2}{f(\psi)},$$

wobei R^2 konstant ist.

Es folgt

$$\lg \varrho = \lg R^2 - \lg r,$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{r'}{r},$$

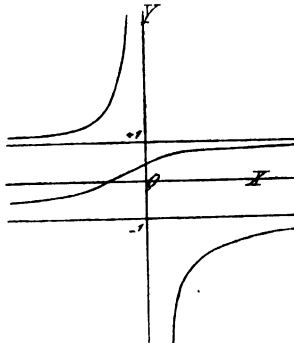
$$\frac{\varrho}{\varrho'} = -\frac{r}{r'},$$

$$\vartheta' = \pi - \vartheta.$$

b) Asymptoten.

Es sind die Asymptoten folgender Kurven zu bestimmen:

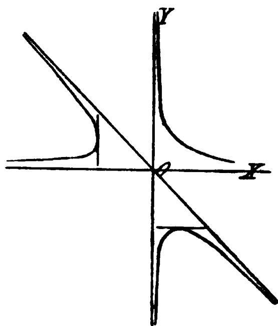
7) Aufg. $x y^2 - x + 2 y - 1 = 0$.



Lös. $x = 0$, $y = \pm 1$.

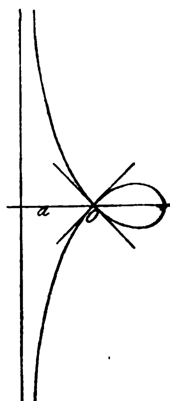
8) **Aufg.** $y^3 - 3y^2x - yx^2 + 2x^3 + y^2 - 6xy + 5x^2 - 2y + 2x + 1 = 0.$

Lös. $y = x,\ y = -x - 2,\ y = 2x + 1.$



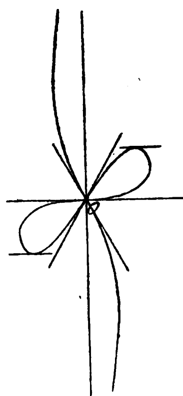
9) **Aufg.** $xy^2 + yx^2 = a^3.$

Lös. $x = 0,\ y = 0,\ y = -x.$



10) **Aufg.** $r\cos\varphi = a\cos 2\varphi.$

Lös. $\varphi = \frac{\pi}{2},\ x = r\cos\varphi = -a.$

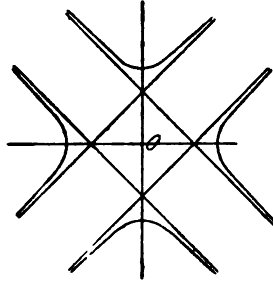


11) **Aufg.** $r^2 = a^2 \frac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi}.$

Lös. $\varphi = \frac{\pi}{2},\ x = r\cos\varphi = 0.$

12) **Aufg.** $r\varphi = a$. (Hyperbolische Spirale.)
Lös. $y = r \sin \varphi = a$.

13) **Aufg.** $r \cos 2\varphi = a$.

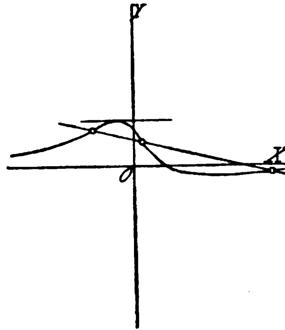


Lös. $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$, $y \pm x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$.

c) **Singuläre Punkte.**

Man bestimme die Wendepunkte folgender Kurven:

14) **Aufg.** $y = a^2 \frac{a - x}{x^2 + a^2}$.

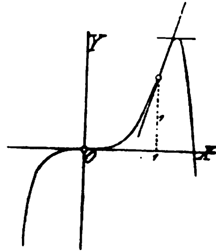


Lös. $\begin{cases} x_1 = -a, \\ y_1 = a; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = a(2 + \sqrt{3}), \\ y_2 = -\frac{a}{4} \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = a(2 - \sqrt{3}), \\ y_3 = -\frac{a}{4} \frac{1 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}. \end{cases}$

Die drei Punkte liegen auf der Geraden

$$y - a = -\tfrac{1}{4}(x + a).$$

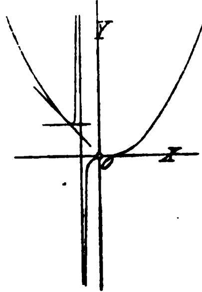
15) **Aufg.** $y = 3x^5 - 2x^6$.



Lös. $x = 0,\ y = 0;\ x = 1,\ y = 1.$

Die Gerade $y = 0$ ist eine fünfpunktig berührende Wendetangente.

16) **Aufg.** $x^3 - axy - b^2y = 0$. (Trident von Newton.)



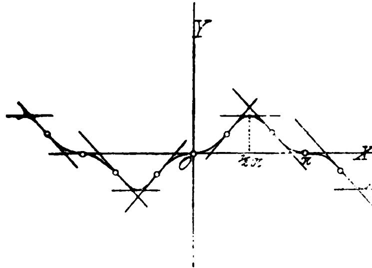
Lös. $x = 0,\ y = 0.$

17) **Aufg.** $y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 4x + 8.$

Lös. $x = +1,\ y = -20.$

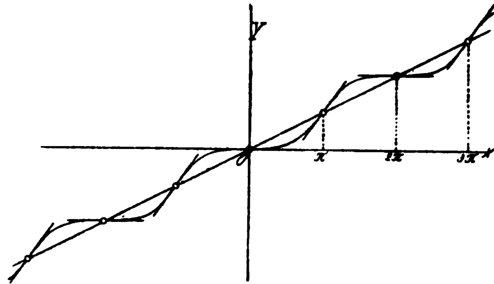
Der Punkt $x = -1,\ y = -14$ ist kein Wendepunkt, er hat eine vierpunktig berührende Tangente.

18) **Aufg.** $y = \sin^3 x$.



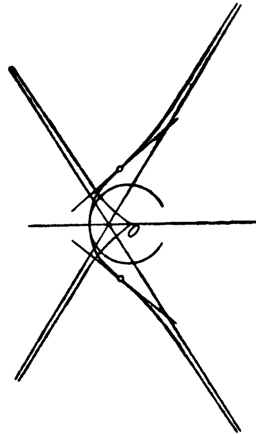
Lös. $x = n\pi,\ y = 0$, wo n eine ganze Zahl bedeutet;
$x = \operatorname{arc\,tang}(\pm\sqrt{2}),\ y = (\tfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$.

19) **Aufg.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{12}\sin 2x.$



Lös. Die Punkte $x = 2k\pi$, $y = k\pi$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, sind Wendepunkte, welche beziehungsweise mit den Geraden $y = k\pi$ fünf unendlich benachbarte Punkte gemein haben. Die Punkte $x = (2k+1)\pi$, $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ sind gewöhnliche Wendepunkte.

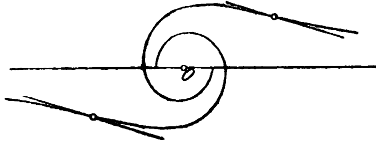
20) **Aufg.** $r = \frac{a\varphi^2}{\varphi^2 - 1}.$



Lös. $r = \frac{3a}{2}$, $\varphi = \pm\sqrt{3}.$

21) **Aufg.** $r = a\varphi^n.$

Lös. $r = a[-n(n+1)]^{\frac{n}{2}}$, $\varphi = [-n(n+1)]^{\frac{1}{2}}.$



Für $n = -1$ verliert dieses Resultat seine Bedeutung. Die Spirale, die sich für $n = -\frac{1}{2}$ ergibt, nämlich $r^2 = \frac{a^2}{\varphi}$ ist bekannt unter dem Namen Lituus. Sie besitzt einen Wendepunkt für $r = a\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{1}{2}$.

Wenn in den folgenden drei Gleichungen a einen variablen Parameter bezeichnet, so wird der geometrische Ort der Wendepunkte sämtlicher Kurven der durch diese Gleichungen gegebenen Kurvenscharen verlangt.

22) Aufg. $y = \frac{x^2}{2} + a \sin x$.

Lös. $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

23) Aufg. $y = \frac{2x^2}{a^2 + x^2}$.

Lös. $y = \frac{1}{2}$.

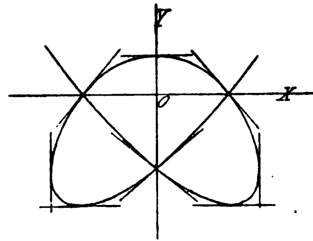
24) Aufg. $y = a e^x - x^2 - 1$.

Lös. $y = -x^2 + 1$.

Es sind die Singularitäten folgender Kurven zu untersuchen:

25) Aufg. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$.

Lös. Die Kurve besitzt drei Doppelpunkte:

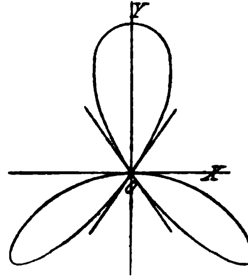


$$x = 0,\quad y = -a;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

$$x = a,\quad y = 0;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$x = -a,\quad y = 0;\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

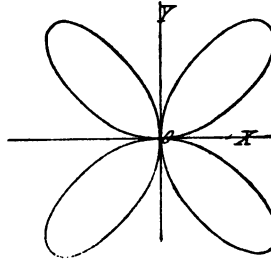
26) **Aufg.** $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0.$



Lös. Der Koordinatenanfangspunkt ist ein dreifacher Punkt. Die Tangenten an die drei Kurvenzweige sind bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

27) **Aufg.** $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$



Lös. Der Koordinatenanfangspunkt ist ein vierfacher Punkt. Die Koordinatenaxen sind die Tangenten an die vier Kurvenzweige.

28) **Aufg.** $x^4 + y^4 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 0.$

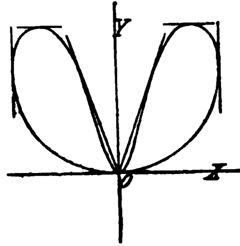
Lös. Dier vier Punkte

$$x = 0,\ y = \pm a;\ \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x = \pm a,\ y = 0;\ \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}$$

sind Doppelpunkte. Wenn eine Kurve vierter Ordnung vier Doppelpunkte besitzt, so muss sie in Kurven niedrigerer Ordnung zerfallen. Die vorliegende Kurve zerfällt in die beiden Ellipsen $x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2 - a^2 = 0$ und $x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2 - a^2 = 0.$

29) **Aufg.** $x^4 + x^2 y^2 - 6 a x^2 y + a^2 y^2 = 0.$

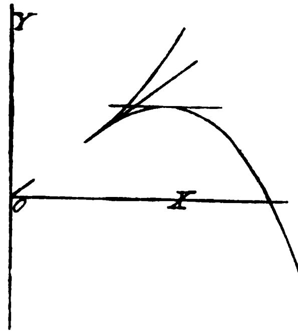


Lös. Die Kurve berührt sich selbst im Koordinatenanfangspunkte, und die X-Axe ist die gemeinsame Tangente der sich berührenden Kurvenzweige.

30) **Aufg.** $(b y - c x)^2 - (x - a)^5 = 0.$

Lös. Die Kurve kann auch dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = a + t^2,$$
$$y = \frac{1}{b}(a c + c t^2 + t^5).$$



Der Punkt $x = a$, $y = \frac{ac}{b}$ ist ein singulärer. Die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung

$$y - \frac{ac}{b} = \frac{c}{b}(x - a).$$

Bezeichnet man die Koordinaten eines Kurvenpunktes in Bezug auf diese Tangente als Abszissen- und die zugehörige Normale als Ordinatenaxe mit ξ und η, so hat man zu setzen

$$\xi = c \, . \frac{y - \frac{ac}{b} + \frac{b}{c}(x - a)}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \eta = b \, . \frac{y - \frac{ac}{b} - \frac{c}{b}(x - a)}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

wodurch man erhält

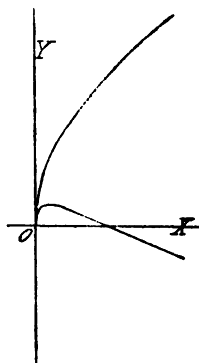
$$\xi = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}\left(\frac{b^2 + c^2}{bc} t^2 + \frac{t^5}{b}\right), \quad \eta = \frac{t^5}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Da hier $m = 2$, $n = 5$ ist (vergl. § 22), so bildet die Kurve in dem betrachteten Punkte eine Spitze erster Art.

31) **Aufg.** $y - b = (x - a)^{\frac{1}{3}} + (x - a)^{\frac{3}{4}}$.

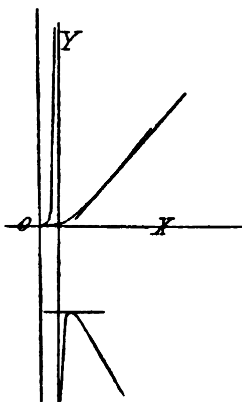
Lös. Setzt man $x - a = t^{12} = \eta$,

$$y - b = t^4 + t^9 = \xi,$$



so ist $m = 4$, $n = 12$. Folglich ist der Punkt $x = a$, $y = b$ ein Rückkehrpunkt zweiter Art; die Tangente in diesem Punkte ist der y-Axe parallel.

32) **Aufg.** $x^4 - a x^2 y - a x y^2 + \frac{a^2 y^2}{4} = 0$.



Lös. Drückt man x und y als Funktionen der dritten Veränderlichen t aus, wonach z. B.

$$x = a t^2,$$

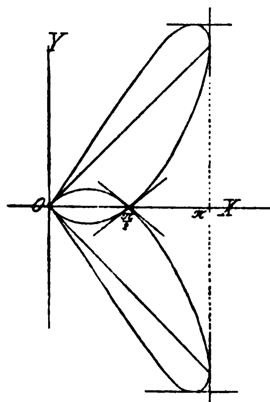
$$y = \frac{2 a t^4}{1 + 2 t} = 2 a t^4 + \ldots,$$

so erkennt man, da $m=2$, $n=4$, dass die Kurve im Koordinatenanfangspunkte eine Spitze zweiter Art bildet. Die X-Axe ist die zugehörige Tangente.

33) Aufg. $(y^2-x^2)^2-x^4 \sin x=0$.

Lös. Betrachtet man nur Punkte der Kurve, die in dem Intervall von $x=0$ bis $x=\pi$ liegen, so findet man, dass im Koordinatenanfangspunkte sich vier Zweige der Kurve zu zwei Spitzen erster Art vereinigen. Der Punkt $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten bestimmt sind durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\pi}{4}.$$



34) Aufg. $x=r(\varphi-\sin\varphi)$,
$y=r(1-\cos\varphi)$. (Zykloide.)

Lös. Entwickelt man $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ nach steigenden ganzen Potenzen von φ, so wird

$$x=r\left(\frac{\varphi^3}{6}-\ldots\right)=\eta,$$

$$y=r\left(\frac{\varphi^2}{2}-\ldots\right)=\xi,$$

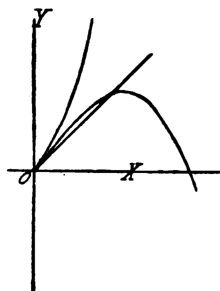
Da hier $m=2$, $n=3$ ist, so sind der Koordinatenanfangspunkt und die Punkte $x=2k\pi$, $y=0$, wo k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, Rückkehrpunkte erster Art. Die Tangenten in diesen Punkten sind der Y-Axe parallel.

35) Aufg. $a^3y^2-2a^2(a+x)xy+a(a+x)^2x^2-x^5=0$.

Lös. Zunächst kann man schreiben

$$x=at^2,$$
$$y=a(t^2+t^4+t^5),$$

und man erkennt, dass der Anfangspunkt der Koordinaten ein singulärer Punkt ist. Wählt man hierauf die Tangente in diesem Punkte $y-x=0$ und die Normale $y+x=0$ zu neuen Koordinatenaxen, so erhält man mittelst der Formeln



$$\xi = \frac{y+x}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{y-x}{\sqrt{2}},$$

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{2}}(2t^2 + t^4 + t^5),$$

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{2}}(t^4 + t^5).$$

Die Kurve besitzt somit im Punkte $x = 0$, $y = 0$ eine Spitze zweiter Art.

36) Aufg. $(y + x + 1)^2 = (1 - x)^5$.

Lös. Werden die Koordinaten eines Punktes der Kurve ausgedrückt durch eine dritte Veränderliche t

$$x - 1 = -t^2,$$
$$y + 2 = t^2 + t^5,$$

so ergibt sich, dass der Punkt $x = 1$, $y = -2$ ein singulärer ist. Die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung $(y + 2) + (x - 1) = 0$. Macht man nun diese Tangente zur Abszissen-, die zugehörige Normale zur Ordinatenaxe eines neuen Koordinatensystems vermittelst der Formeln

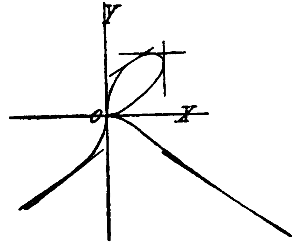
$$\eta = \frac{(y+2)+(x-1)}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \frac{-(y+2)+(x-1)}{\sqrt{2}},$$

so wird

$$\xi = -\frac{2t^2 + t^5}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{t^5}{\sqrt{2}},$$

und man erkennt, dass die Kurve in dem betrachteten Punkte eine Spitze erster Art besitzt.

37) Aufg. $y^5 + a x^4 - b^2 x y^2 = 0$.



Lös. Im Koordinatenanfangspunkt besitzt die Kurve einen dreifachen Punkt, einen Wendepunkt und eine Spitze erster Art.

Anmerkung. Die meisten in dieser Nummer enthaltenen Kurven finden sich in dem Werke von Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes. (Genf 1750.)

d) **Berührung der Kurven.**

38) Aufg. Man zeige, dass sich sämtliche Kurven, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$$

ist, indem n verschiedene konstante Werte beigelegt werden, in dem Punkte a, b berühren.

39) Aufg. Man bestimme die Parabel, deren Axe der Ordinatenaxe parallel ist und welche mit der Kurve

$$y = \frac{x^3}{a^2}$$

im Punkte $x = a$, $y = a$ einen Kontakt von möglichst hoher Ordnung bildet.

Lös. Die Gleichung der Parabel ist

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a}{3}\left(y - \frac{a}{4}\right).$$

40) Aufg. Es ist zu zeigen, dass der Kreis

$$x^2 + y^2 - 6(x + y) + 10 = 0$$

und die Kurve

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$$

im Punkte $x = y = 1$ einen Kontakt dritter Ordnung mit einander eingehen.

41) Aufg. Es sollen die beiden Parabeln bestimmt werden, deren Axen den Koordinatenaxen parallel sind und welche im Punkte $x = a$, $y = 2a$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = 5a^2$ einen Kontakt zweiter Ordnung bilden.

Lös. Die Gleichungen der gesuchten Parabeln sind

$$\left(y - \frac{8a}{5}\right)^2 = \frac{2a}{5}\left(\frac{7a}{5} - x\right)$$

und

$$\left(x - \frac{a}{5}\right)^2 = \frac{16a}{5}\left(\frac{11a}{5} - y\right).$$

42) Aufg. Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Ellipsen zu bestimmen, deren Axenrichtung bekannt ist und welche mit einer gegebenen Kurve in einem gegebenen Punkte derselben einen Kontakt zweiter Ordnung bilden.

Lös. Der gesuchte Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den gegebenen Punkt geht.

43) **Aufg.** Von welcher Ordnung ist die Berührung der beiden Kurven

$$\left.\begin{array}{l} x = 2(\varphi - \sin\varphi) \\ y = 2(1 - \cos\varphi) \end{array}\right\} \text{ und } y = (3x)^{\frac{2}{3}}$$

im Koordinatenanfangspunkte?

Lös. Die Ordnung des Kontaktes ist $\frac{5}{2}$.

44) **Aufg.** Von welcher Ordnung ist die Berührung der beiden Kurven

$$y = x^{\frac{3}{4}} \text{ und } y = x^{\frac{4}{5}}$$

im Koordinatenanfangspunkte?

Lös. Die Ordnung des Kontaktes ist $\frac{1}{4}$.

(In dem Werke: Traité de calcul diff. et de calc. intégral von J. Bertrand wird im I. Teil, pag. 571 irrtümlich $\frac{1}{3}$ als Ordnung des Kontaktes angegeben.)

e) Krümmungsradien und Evoluten.

45) **Aufg.** Man bestimme die Asymptoten der Evolute der Kurve

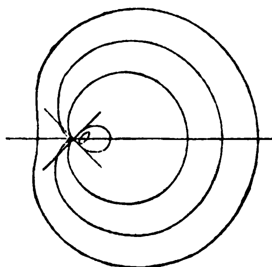
$$y = \operatorname{tang} x.$$

46) **Aufg.** Wird der Krümmungsradius in irgend einem Punkte einer Kurve mit ϱ bezeichnet, so soll bewiesen werden, dass der Krümmungsradius der Evolute dieser Kurve in dem entsprechenden Punkte $\varrho \frac{d\varrho}{ds}$ ist.

47) **Aufg.** Man berechne den Krümmungsradius der Kurve

$$r = a \sin 2\varphi.$$

Lös. $\varrho = \dfrac{(4a^2 - 3r^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^2 - 3r^2}$.



48) **Aufg.** Man bestimme den Krümmungsradius für die Pascal'sche Schnecke.

$$r = a + b\cos\varphi.$$

Lös. $\varrho = \dfrac{(b^2 + 2ar - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3ar + 2b^2 - 2a^2}$.

49) Aufg. Es soll die Evolute der logarithmischen Spirale

$$r = a^{m-\varphi}$$

gefunden werden.

Lös. Bezeichnet p den Abstand des Poles von der Tangente in einem beliebigen Punkte der Kurve, so kann die Gleichung der Kurve auch geschrieben werden in der Form

$$p = \frac{r}{\sqrt{1 + (l\,a)^2}}.$$

Wenn r' und p' dieselbe Bedeutung für die gesuchte Evolute haben, wie r und p für die gegebene Kurve, so hat man die Beziehungen

$$p'^2 = r^2 - p^2,\ r'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,p\,\varrho,\ \varrho = r\frac{d\,r}{d\,p}.$$

Führt man für ϱ seinen Wert ein, so erhält man

$$p' = \frac{r'}{\sqrt{1 + (l\,a)^2}},$$

d. i. die Gleichung einer Spirale, welche der vorgelegten ähnlich ist.

50) Aufg. Es soll bewiesen werden, dass in solchen Punkten einer gegebenen Kurve, in welchen der Krümmungsradius einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, der Krümmungskreis mit der gegebenen Kurve einen Kontakt dritter Ordnung bildet.

2. Kegelschnitte.

51) Aufg. Es soll die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte untersucht werden.

Lös. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes ist

$$y^2 = 2\,p\,x \mp n\,x^2,$$

wo für den Fall, dass $n = 0$ wird, die Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$ die der Parabel ist; $y^2 = 2\,p\,x - n\,x^2$ ist die Gleichung der Ellipse und $y^2 = 2\,p\,x + n\,x^2$ die der Hyperbel. Die Grösse $2\,p$ heisst der Parameter der Kurve und ist die durch den Brennpunkt gehende, auf der Hauptaxe senkrecht stehende Sehne.

Heissen a und b resp. die halbe Haupt- und Nebenaxe der Ellipse und Hyperbel, so ist

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ und } n = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \mp nx}{y}.$$

Die Gleichung der Tangente an einen Punkt (x', y') ist

$$y - y' = \frac{p \mp nx'}{y'}(x - x').$$

Für $x = 0$ wird $y = \frac{px'}{y'}$; hieraus die einfache Konstruktion einer Tangente im Punkte (x', y') eines Kegelschnittes. Der Ausdruck $y = \frac{px'}{y'}$ wird für die Parabel $= \frac{1}{2} y'$. Da für $y' = \infty$ auch $y = \infty$ ist, so hat die Parabel keine Asymptote. Für die Ellipse und Hyperbel ist

$$y = \frac{px'}{\pm\sqrt{2px' \mp nx'^2}} = \frac{p}{\pm\sqrt{\frac{2p}{x'} \mp n}}.$$

Für $x' = \infty$ erhält man nur bei der Hyperbel den Grenzwert $y = \frac{p}{\pm\sqrt{n}} = \pm b$, wenn man für p und n die oben angegebenen Ausdrücke einsetzt. Es hat also die Hyperbel zwei Asymptoten. Setzt man in der obigen Gleichung der Tangente $x' = \infty$ und $y = 0$, so erhält man bei der Hyperbel das zu $y = 0$ gehörige $x = -a$.

Die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel sind also

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 1 \text{ und } -\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 1.$$

Für die Parabel ist die Gleichung der Tangente:

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \text{ oder: } yy' = p(x + x');$$

die Gleichung der Normale:

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

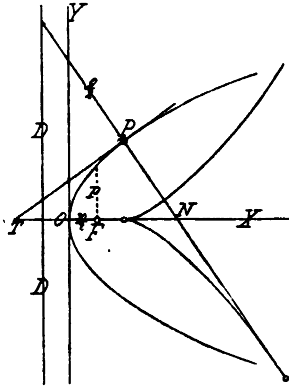
$$T = \sqrt{2px' + 4x'^2} = \sqrt{y'^2 + 4x'^2}, \qquad S_t = 2x',$$

$$N = \sqrt{p(2x' + p)} = \sqrt{y'^2 + p^2}, \qquad S_n = p, \text{ also konstant.}$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = 3x + p,$$

$$Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$



Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = -\frac{(2x'+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = -\frac{(y'^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = -\frac{N^3}{p^2}.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$Y^2 = \tfrac{8}{27}\frac{(X-p)^3}{p}.$$

Ist die Gleichung der Parabel $x^2 = 2py$, so ist

$$X = -\frac{x'^3}{p^2}, \quad Y = \frac{2p^2 + 3x'^2}{p^2}, \quad \varrho = \frac{(p^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Die Gleichung der Evolute ist:

$$Y - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} X^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf deren Mittelpunkt als Anfangspunkt, lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = \mp\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Für einen Punkt (x', y') der Kurve ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \mp\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x')$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung gilt sowohl für ein rechtwinkliges, als auch für ein schiefwinkliges Koordinatensystem.

Für $y = 0$ wird $xx' = a^2$. Die Konstruktion der Tangente an eine Ellipse oder Hyperbel in einem gegebenen Punkte (x', y') derselben und ebenso von einem gegebenen Punkte ausserhalb derselben ist hiernach leicht. Um die letztere Aufgabe zu lösen,

lege man durch den gegebenen Punkt die X-Axe, suche zu derselben mit Hülfe einer bekannten Eigenschaft konjugierter Durchmesser die Y-Axe und konstruiere die Abszisse des Berührungspunktes der gesuchten Tangente mittelst der Gleichung

$$x' = \frac{a^2}{x}.$$

Die Gleichung der Normale ist für das rechtwinklige Koordinatensystem

$$y - y' = \pm \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

oder

$$x \frac{y'}{b^2} \mp y \frac{x'}{a^2} = x' y' \left(\frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{a^2}\right).$$

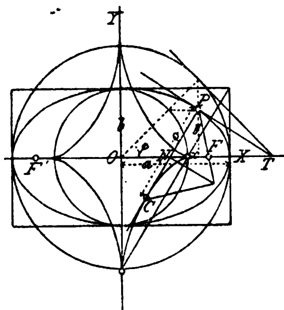
Für den Kreis ist $b = a$, also der Ausdruck rechts $= 0$, d. h. die Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Setzt man in der Gleichung der Normale $y = 0$, so ist das zugehörige $x = x' \frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = x' e^2$, wenn e die Exzentrizität der Ellipse oder Hyperbel bedeutet.

Es ist ferner

$$S_n = \mp \frac{b^2}{a^2} x', \qquad S_t = - \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Die Subtangente ist also unabhängig von b.

Für den Krümmungsradius ergibt sich



$$\varrho = - \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Krümmung ergeben sich aus

$$y - Y = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) y}{a^2 b^4},$$

$$x - X = \pm \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) x}{a^4 b^2}.$$

Die Gleichung der Evolute der Ellipse und Hyperbel ist, wenn $a^2 \mp b^2 = c^2$ gesetzt wird,

$$a^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \pm b^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten ist

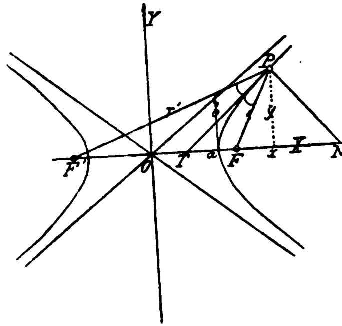
$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

wo das Koordinatensystem im allgemeinen ein schiefwinkliges ist.

Die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1,$$

wonach sich dieselbe leicht konstruieren lässt.



$$S_t = -x'.$$

Eine andere Darstellungsweise der Ellipse besteht darin, dass man die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve durch eine dritte Veränderliche φ ausdrückt:

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi.$$

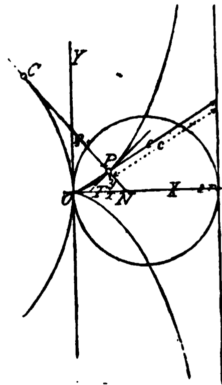
Ebenso kann die Hyperbel dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = a \sec\varphi, \quad y = b \operatorname{tang}\varphi.$$

Man führe die den vorhergehenden analogen Untersuchungen für diese Darstellungsweise der Ellipse und Hyperbel aus.

3. Höhere algebraische Kurven.

52) Aufg. Es sollen die hingehörigen Stücke für die unter dem Namen der Zissoide des Diocles bekannten Kurve bestimmt werden.



Lös. Ein beliebiger Punkt der Kurve wird auf folgende Weise gefunden: An einen Kreis vom Radius r werden zwei parallele Tangenten AB und CD gelegt und vom Berührungspunkt O der Tangente AB aus wird eine beliebige Sekante gezogen. Der Schnittpunkt der letzteren mit der Tangente CD sei E. Wenn man nun von E aus rückwärts auf die Sekante die Länge der

Sehne, welche von der Sekante durch den Kreis abgeschnitten wird, abträgt, so ist der zweite Endpunkt dieser Strecke, P, ein Punkt der Kurve. Wählt man die Verbindungsgerade der Berührungspunkte beider Tangenten zur X-Axe, die Tangente AB zur Y-Axe, so lautet die Gleichung der Zissoide:

$$x^3 = y^2 (2r - x);$$

ihrer Tangente:

$$y - y' = \frac{3x'^2 + y'^2}{2y'(2r - x')}(x - x');$$

ihrer Normale:

$$y - y' = -\frac{2y'(2r - x')}{3x'^2 + y'^2}(x - x');$$

$$S_t = \frac{x'(2r - x')}{3r - x'}, \qquad T = \frac{x'r}{3r - x'}\sqrt{\frac{8r - 3x'}{2r - x'}},$$

$$S_n = \frac{x'^2(3r - x')}{(2r - x')^2}, \qquad N = \frac{rx'\sqrt{x'(8r - 3x')}}{(2r - x')^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \pm \frac{r\sqrt{x'}(8r - 3x')^{\frac{3}{2}}}{3(2r - x')^2},$$

wobei das obere Zeichen dem oberen, das untere dem unteren Zweige der Kurve entspricht.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$Y = \frac{8r\sqrt{x'}}{3\sqrt{2r - x'}} = \frac{8}{3}\frac{ry'}{x'},$$

$$X = -\frac{rx'(12r - 5x')}{3(2r - x')^2};$$

Gleichung der Evolute:

$$27Y^4 + 1152r^2Y^2 + 4096r^3X = 0.$$

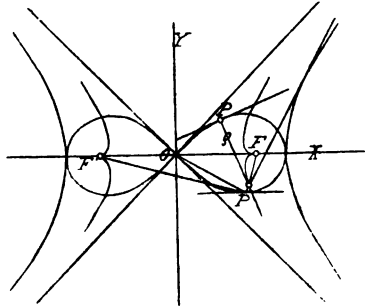
Die Kurve besitzt im Anfangspunkt der Koordinaten einen Rückkehrpunkt der ersten Art; die Tangente in diesem Punkte ist die X-Axe. Die Gerade $x = 2r$ ist eine Asymtote der Kurve. Da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3r^2}{\sqrt{x(2r - x)^5}}$$

immer dasselbe Zeichen wie die Ordinate y hat, so kehrt die Kurve stets ihre konvexe Seite der X-Axe zu.

53) Aufg. Es soll die Lemniskate untersucht werden.

Lös. Eine Entstehungsweise der Lemniskate ist folgende: Fällt man von dem Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten dieser Kurve Lote, so ist der geometrische Ort dieser Fusspunkte die unter dem Namen Lemniskate bekannte Kurve, deren Gestalt die einer liegenden Acht ist.



Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel sei $x^2 - y^2 = a^2$; die Gleichung der Tangente ist

1) $x x_1 - y y_1 = a^2$,

die Gleichung der vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Senkrechten

2) $x y_1 + y x_1 = 0$.

Durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) mit der Gleichung $x_1^2 - y_1^2 = a^2$ erhält man die Gleichung der Lemniskate:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

Wählt man Polarkoordinaten, so wird

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \,.\, (a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y \,.\, (a^2 + 2x^2 + 2y^2)} = \frac{\cos\varphi \,.\, (1 - 2\cos 2\varphi)}{\sin\varphi \,.\, (1 + 2\cos 2\varphi)};$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\operatorname{tang} 2\varphi.$$

Die Grösse $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet. Aus der letzten Formel folgt, dass dieser Winkel doppelt so gross ist, als der Winkel, den derselbe Radius vector mit der Abszissenaxe einschliesst.

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \mp \frac{a^2}{3\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{3r}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$Y = -\frac{y'(a^2 - x'^2 - y'^2)}{3(x'^2 + y'^2)} = -\frac{2a \,.\, \sin^3 \varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$X = \frac{x'(a^2 + x'^2 + y'^2)}{3(x'^2 + y'^2)} = \frac{2a \,.\, \cos^3 \varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$3(X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}})(X^{\frac{2}{3}} - Y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2a.$$

Da in der Gleichung der Lemniskate (in rechtwinkligen Koordinaten) das konstante Glied und die Glieder erster Ordnung fehlen, so besitzt die Kurve im Nullpunkte einen singulären Punkt und zwar einen Doppelpunkt. Die gleich Null gesetzten Glieder zweiter Ordnung $x^2 - y^2 = 0$ liefern die Tangenten an die beiden Kurvenzweige, welche sich in diesem Punkte schneiden.

Der Nullpunkt ist für beide Zweige ein Wendepunkt.

Man bestätige, dass die höchsten und tiefsten Punkte der Lemniskate auf dem Kreise $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ liegen.

Zusatz. Die Grundlinie eines Dreiecks ist gegeben. Man soll den Ort des Scheitels finden, wenn das Produkt der Seiten dem Quadrate der halben Grundlinie gleich ist.

Auflösung. Der Ort ist eine Lemniskate von der Form

$$(x^2 + y^2)^2 + 2m^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Die halbe Axe der Lemniskate ist also $= m\sqrt{2}$.

Die Aufgabe lässt sich noch allgemeiner fassen. Gegeben seien die „Brennpunkte“ F und F' in fester Lage mit der Entfernung $2a$. Es soll der Ort der Punkte bestimmt werden, für den das Produkt seiner Entfernungen von den Brennpunkten gleich der Konstanten c^2 ist.

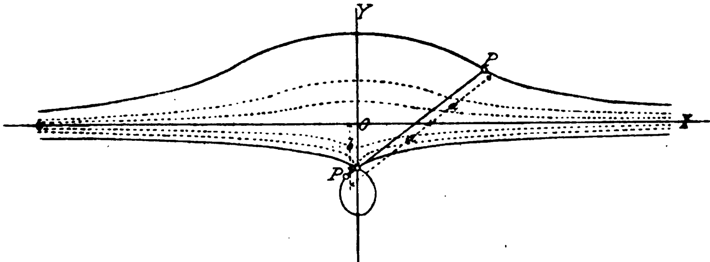
Nimmt man FF' als Abszissen, die Mittelsenkrechte darauf als Ordinate, so wird die Kurvengleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = c^4 - a^4.$$

Lässt man c variieren, so erhält man die in der Optik wichtigen „Cassini'schen Kurven“. Ist $c = a$, so erhält man als Spezialfall die Lemniskate.

54) Aufg. Untersuchung der Konchoide des Nicomedes.

Lös. Denkt man sich eine gerade Linie und zwar, um die Begriffe zu fixieren, in horizontaler Lage, unterhalb derselben in der senkrechten Entfernung b einen Punkt, den man den Pol der Konchoide nennt; zieht man alsdann von diesem Pol aus gerade Linien durch die feste Gerade und schneidet auf ihnen oberhalb und unterhalb des Durchschnittspunktes eine konstante Grösse a



ab, so erhält man dadurch zwei Punkte, welche respektive zur oberen und unteren Konchoide gehören. Nimmt man die gegebene feste Gerade zur X-Axe, die von dem Pol auf diese gefällte Senkrechte zur Y-Axe an und zwar so, dass zur oberen Konchoide die positiven Werte der y gehören, zur unteren dagegen die negativen, so wird die Gleichung der Konchoide

$$\frac{y^2 x^2}{(y+b)^2} + y^2 = a^2,$$

oder

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0,$$

oder

$$x = \pm \frac{b+y}{y}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Für das obere Zeichen + ist alsdann

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3 + a^2 b};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 y^3 (2a^2 b - y^3 - 3by^2)}{(y^3 + a^2 b)^3}.$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y' = -\frac{y'^2\sqrt{a^2 - y'^2}}{y'^3 + a^2 b} \cdot (x - x');$$

die Gleichung der Normale ist

$$y - y' = \frac{y'^3 + a^2 b}{y'^2 \sqrt{a^2 - y'^2}} \cdot (x - x').$$

$$T = \frac{a\sqrt{y'^4 + 2 b y'^3 + a^2 b^2}}{y' \sqrt{a^2 - y'^2}}, \qquad S_t = -\frac{y'^3 + a^2 b}{y' \sqrt{a^2 - y'^2}},$$

$$N = \frac{a y' \sqrt{y'^4 + 2 b y'^3 + a^2 b^2}}{y'^3 + a^2 b}, \qquad S_n = -\frac{y'^3 \sqrt{a^2 - y'^2}}{y'^3 + a^2 b}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \frac{a (y'^4 + 2 b y'^3 + a^2 b^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^3 (2 a^2 b - y'^3 - 3 b y'^2)}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$Y = \frac{b [a^4 b^2 - y'^3 (y'^3 - 3 a^2 y' - 3 a^2 b)]}{y'^3 [2 a^2 b - y'^3 - 3 b y'^2]},$$

$$X = \frac{b (2 y' + 3 b) (a^2 - y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y' (2 a^2 b - y'^3 - 3 b y'^2)}.$$

Die X-Axe ist eine Asymptote der Kurve.

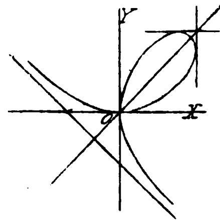
Der zweite Differentialquotient $= 0$ gesetzt, gibt

$$y^3 + 3 b y^2 - 2 a^2 b = 0.$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung geben die Ordinaten der Wendepunkte, welche aber hinsichtlich ihrer Realität näher zu untersuchen sind. Hierbei stellt sich eine Verschiedenheit heraus, je nachdem b grösser als a, oder b kleiner als a ist. Der Punkt $x = 0$, $y = -b$ des unteren Zweiges der Kurve ist ein Doppelpunkt, oder ein Rückkehrpunkt erster Art oder ein isolierter Punkt, je nachdem $b \lesseqgtr a$ ist.

Anmerkung. Wenn man auf der ursprünglich als fest angenommenen Geraden eine Ellipse so fortschiebt, dass ihre grosse Axe stets in dieser Linie liegt und von dem angenommenen Pol der Konchoide gerade Linien durch den Mittelpunkt der Ellipse zieht, so werden die beiden Durchschnittspunkte in der Peripherie der Ellipse Punkte einer Kurve, die man elliptische Konchoide nennt. Ebenso erhält man auch eine parabolische und eine hyperbolische Konchoide. Wo vorhin die vom Pol ausgehende gerade Linie durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogen wurde, wird sie bei den beiden letzteren durch einen beliebig angenommenen Punkt der bezüglichen Axe zu ziehen sein.

55) **Aufg.** Es soll das **Folium von Descartes** untersucht werden.



Lös. Die Gleichung dieser Kurve ist

$$x^3 + y^3 - a x y = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - ay}{3y^2 - ax}.$$

Der Anfangspunkt der Koordinaten ist ein Doppelpunkt, und die Koordinatenaxen sind die Tangenten in demselben. Die Kurve besitzt eine (blattförmige) Schleife und zwei unendliche Äste. Die Gerade $y = -x - \frac{a}{3}$ ist eine Asymptote der Kurve. Der höchste Punkt des Blattes hat die Koordinaten

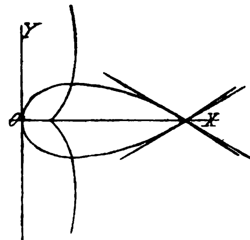
$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{2}\,.\,a = a\,.\,0{,}42\ldots,$$
$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{4}\,.\,a = a\,.\,0{,}53\ldots.$$

Der Scheitel des Blattes liegt auf der Geraden $y = x$ und hat die Koordinaten

$$x = y = \tfrac{1}{2}a.$$

Der Krümmungsradius ist im Koordinatenanfangspunkte und zwar für beide Kurvenzweige $= \frac{1}{2}a$, im Scheitel $= \frac{1}{16}a\sqrt{2}$.

56) **Aufg.** Man untersuche die Kurve, welche dargestellt wird durch die beiden Gleichungen



$$x = t^2,$$
$$y = t - \tfrac{1}{3}t^3.$$

Die Ordinate wird gleich Null für $t = 0$ und $t = \pm\sqrt{3}$. Demnach schneidet die Kurve die Abszissenaxe im Koordinatenanfangspunkte und in dem Punkte $x = 3$, $y = 0$. Der letztere ist ein Doppelpunkt.

Es wird

$$\frac{dx}{dt} = 2t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t^2.$$

Ein Maximum der Ordinate tritt ein im Punkte $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$ für $t = +1$, ein Minimum im Punkte $x = 1$, $y = -\frac{2}{3}$ für $t = -1$.

Im Doppelpunkte sind die Tangenten bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\alpha = \pm 30^0).$$

Ferner wird

$$ds = (1 + t^2)\, dt,$$
$$\varrho = -\tfrac{1}{2}(1 + t^2)^2.$$

Im Koordinatenanfangspunkte ist

$$\varrho = -\tfrac{1}{2},$$

im höchsten und tiefsten Punkt

$$(t = \pm 1) \quad \varrho = -2,$$

im Doppelpunkt

$$(t = \pm \sqrt{3}) \quad \varrho = -8.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = \tfrac{1}{2} + t^2 - \frac{t^4}{2}, \qquad Y = -\tfrac{4}{3}\, t^3.$$

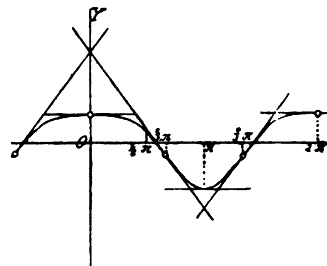
Durch diese beiden Gleichungen ist die Evolute der Kurve bestimmt; sie besitzt in dem Punkte $X = \frac{1}{2}$, $Y = 0$ ($m = 2$, $n = 3$) eine Spitze erster Art.

4. Transzendente Kurven.

57) Aufg. Es soll die Kurve untersucht werden, deren Gleichung ist

$$y = \cos x - \tfrac{1}{4} \cos 2x.$$

Lös. Aus der Kurvengleichung folgt



$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x = $$
$$= \sin x (\cos x - 1),$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x + \cos 2x =$$
$$= -2 \sin \tfrac{3}{2} x \sin \tfrac{1}{2} x.$$

In den höchsten Punkten $x = 0$, 2π, 4π, ... $2k\pi$, $y = \frac{3}{4}$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, hat die Tangente vier unendlich benachbarte Punkte mit der Kurve gemein.

Tiefste Punkte treten ein für $x = \pi,\ 3\pi,\ \ldots (2k+1)\pi,\ y = -\frac{5}{4}$, Wendepunkte für $x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \ldots,\ y = (\frac{1}{2}\sqrt{3})^3$.

Ferner wird

$$ds = \sqrt{1 + 4\sin^2 x \,.\, \sin^4 \frac{x}{2}} \,.\, dx$$

$$\varrho = \frac{\left(\sqrt{1 + 4\sin^2 x \sin^4 \frac{x}{2}}\right)^3}{\cos 2x - \cos x}.$$

Demnach wird $\varrho = \frac{1}{2}$ für die tiefsten Punkte der Kurve, für die Wende- und höchsten Punkte natürlich $= \infty$.

58) Aufg. Man untersuche die Kurve, deren Gleichung ist

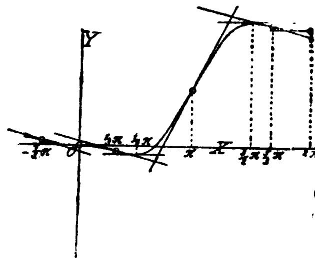
$$y = \frac{1}{2}x - \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

Lös. Die Punkte, deren Abszissen $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots k\pi$ sind, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, liegen auf der Geraden $y = \frac{1}{2}x$.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x - \sin 2x.$$



Die Ordinate erreicht ein Maximum für $x = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \ldots \frac{4k-1}{2}\pi$, ein Minimum für $x = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \ldots \frac{4k+1}{2}\pi$.

Wendepunkte treten ein für $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots 2k\pi$ und für $x = \ldots -\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{3}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\ \ldots\ \frac{2k+1}{3}\pi$.

Ferner wird

$$ds = \sqrt{1 + \cos^2 x - 2\cos^3 x + \cos^4 x} \,.\, dx,$$

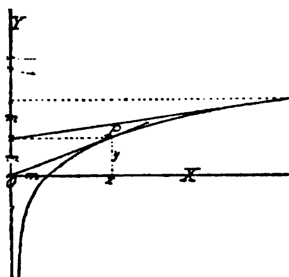
$$\varrho = \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 x - 2\cos^3 x + \cos^4 x})^3}{\sin x - \sin 2x}.$$

In den höchsten Punkten wird demnach $\varrho = -1$, in den tiefsten $\varrho = +1$.

59) **Aufg.** Es soll die **logarithmische** oder **logistische** Linie untersucht werden.

Lös. In dieser Kurve schreiten die Ordinaten in arithmetischer Progression fort, während die Abszissen in geometrischer Reihe wachsend angenommen werden. Ihre Gleichung wird

$$y = m \,.\, l\, x.$$



$$\frac{dy}{dy} = \frac{m}{x}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{m}{x^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$y - y' = \frac{m}{x'}(x - x');$$

die Gleichung der Normale wird

$$y - y' = -\frac{x'}{m}(x - x').$$

$$T = l\,x' \sqrt{m^2 + x'^2}, \qquad S_t = x'\,l\,x' = \frac{x'\,y'}{m},$$

$$N = \frac{y'}{x'}\sqrt{m^2 + x'^2}, \qquad S_n = \frac{m^2}{x'}\,l\,x' = \frac{y'}{x'}\,m.$$

Die Subtangente in Bezug auf die Y-Axe ist $= m$.

Der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{(m^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{m\,x'}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

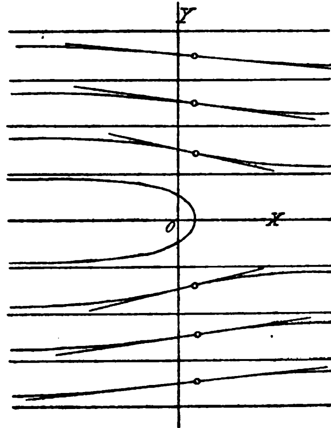
$$X = \frac{2\,x'^2 + m^2}{x'},$$

$$Y = m \,.\, l\,x' - \frac{m^2 + x'^2}{m} = y' - \frac{m^2 + x'^2}{m}.$$

60) **Aufg.** Es soll die **Quadratrix** des **Dinostratus** untersucht werden.

Lös. Wenn man eine gerade Linie um einen festen Endpunkt bewegt denkt, so dass ein Kreisbogen und zwar zunächst ein Quadrant entsteht, so möge die erste Lage des bewegten Radius eine vertikale gewesen sein und die Ordinaten- oder Y-Axe vorstellen, seine letzte Lage, die horizontale, die Abszissen- oder

X-Axe. Denkt man sich nun auf dem bewegten Radius in einer seiner Lagen einen Punkt so bestimmt, dass der bis dahin beschriebene Bogen sich zum ganzen Viertelkreis wie $r_0 - y$ zu r_0 verhält, so gehört dieser Punkt der Quadratrix an. Nimmt man nun noch an, dass der Winkel, den der bewegte Radius noch zu beschreiben hat, bis er in die horizontale Lage kommt, sich zu zwei Rechten verhält so wie $\varphi : \pi$, so hat man als Gleichung der Quadratrix:



$$y = \frac{2\varphi}{\pi} \cdot r_0;$$

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \varphi;$$

$$x = \frac{2\varphi}{\pi \cdot \operatorname{tang} \varphi} r_0.$$

Um den Durchschnittspunkt der Kurve mit der letzten Lage des bewegten Radius, d. h. mit der Abszissenaxe zu erhalten, muss man $\varphi = 0$ setzen; es wird aber dann $x = \frac{0}{0}$, oder, wenn man nach der gewöhnlichen Methode den wahren Wert bestimmt,

$$x = \frac{2r_0}{\pi}.$$

Bequemer werden die nötigen Ausdrücke, wenn man neben φ noch den Radius vector r statt der rechtwinkligen Koordinaten in die Rechnung einführt; es wird dann $y = r \sin \varphi$, $x = r \cos \varphi$, also die Gleichung der Kurve

$$r = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi};$$

mithin

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi};$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi \cdot (1 + \cos^2 \varphi) - 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^3 \varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

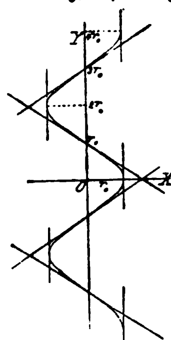
$$= \frac{r_0}{\pi} \frac{(\sin^2 \varphi - 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3 \varphi (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi)}.$$

Die rechtwinkligen Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = -\frac{r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin^2\varphi - 4\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \varphi^2(1 + 2\cos^2\varphi)}{\sin\varphi \, . \, (\sin\varphi - \varphi \, . \cos\varphi)},$$

$$Y = \frac{r_0}{\pi} \cdot \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi + \varphi\sin^2\varphi(1 - 4\cos^2\varphi) + \varphi^2\sin\varphi\cos\varphi(1 + 2\cos^2\varphi) - \varphi^3}{\sin^3\varphi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}.$$

Um zu untersuchen, ob die Kurve Asymptoten hat, muss man in den Ausdruck der Polarsubtangente $r^2 \, . \frac{d\varphi}{dr}$, den Radius vector r unendlich setzen oder denjenigen Wert von φ, welcher aus der Gleichung der Kurve dem unendlichen r entspricht, und dann zusehen, ob die Polarsubtangente einen endlichen Wert erhält. Setzt man aber in $r = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ den Radius vector $r = \infty$, so wird $\varphi = \pi,\ 3\pi,\ 2\pi, \ldots$ mithin $r^2 \, . \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2r_0}{\pi} \cdot \frac{\varphi^2}{\sin\varphi - \varphi \, . \cos\varphi} = 2r_0$, $-4r_0$, $+6r_0$, $-8r_0, \ldots$ Die Kurve hat also unendlich viele Asymptoten.



Anmerkung. Ganz ähnlich gibt die Quadratrix von Tschirnhausen als Gleichung

$$y = \frac{2\varphi}{\pi} \, . \, r_0$$

und

$$x = r_0 \, . \cos\varphi$$

oder

$$x = r_0 \, . \cos\frac{\pi y}{2r_0}.$$

61) Aufg. Untersuchung der Kettenlinie.

Lös. Denkt man sich eine vollkommen biegsame, aber schwere Linie in ihren beiden Endpunkten an zwei Punkten befestigt, aber so, dass sie nicht gespannt ist, so bildet sie bekanntlich die Kettenlinie. Die Gleichung der Kettenlinie ist

$$y = \tfrac{1}{2} m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right);$$

$$x = m\, l \frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}.$$

Für $x = 0$ wird $y = m$.

Es ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{1}{m}\sqrt{y^2 - m^2};\ \cos\alpha = \frac{m}{y}.$$

Hieraus ergibt sich leicht eine Tangentenkonstruktion.

Ferner wird

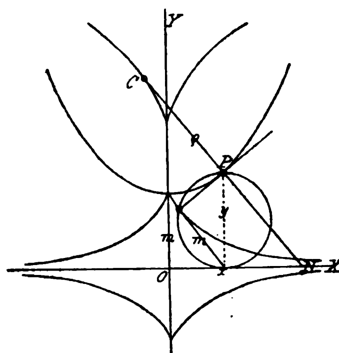
$$\frac{ds}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right);$$

$$S_t = \frac{m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}},$$

$$S_n = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right),$$

$$T = \frac{m}{2}\,\frac{\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}},$$

$$N = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2;$$



$$\varrho = N.$$

Die Kettenlinie besitzt also gemeinsam mit dem Kreise die Eigenschaft, dass in jedem Punkte der Kurve Normale und Krümmungsradius ihrem absoluten Betrage nach einander gleich sind. Jedoch liegen sie bei der Kettenlinie nach entgegengesetzten Seiten, bei dem Kreise nach derselben Seite, nämlich nach dem Mittelpunkte zu.

$$X = x - \tfrac{1}{4}m\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right),$$

$$Y = m\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

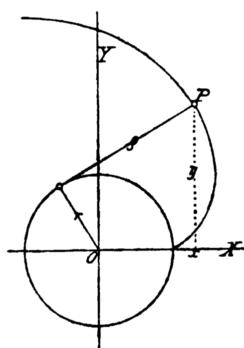
Die Gleichung der Evolute wird

$$X = m\,l\left(\frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4m^2}}{2m}\right) \mp \frac{Y\sqrt{Y^2 - 4m^2}}{4m}.$$

Über die Gleichung der Kettenlinie sehe man nach: Theorie der Potentialfunktionen von Gudermann, Berlin 1833. S. 84.

62) **Aufg. Untersuchung der Kreisevolvente.**

Lös. Wenn in dem Falle der gewöhnlichen Epizykloide der Radius des rollenden Kreises unendlich gross wird, so nennt man die entsprechende Kurve Kreisevolvente. Diese wird demnach durch einen beliebigen Punkt einer Geraden beschrieben, welche sich, ohne zu gleiten, auf einem Kreise abwälzt. Wählt man die Verbindungsgerade des Kreismittelpunktes O mit dem Berührungspunkt der beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen zur X-Axe, die in O darauf Senkrechte zur Y-Axe, so erhält man für die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve die Gleichungen



$$x = r(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$
$$y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

wo r den Radius des festen Kreises und φ den Zentriwinkel des abgewickelten Kreisbogens bezeichnet.

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = r\varphi\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi, \text{ also } \alpha = \varphi;$$

$$ds = r\varphi\, d\varphi, \quad \varrho = r\varphi.$$

Es ist also der Krümmungsradius gleich der Länge des abgewickelten Kreisbogens. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\cos\varphi, \qquad Y = r\sin\varphi,$$

woraus

$$X^2 + Y^2 = r^2.$$

Die Evolute der Kreisevolvente ist mithin, wie nach der Entstehungsweise der Kurve erwartet werden musste, der gegebene feste Kreis.

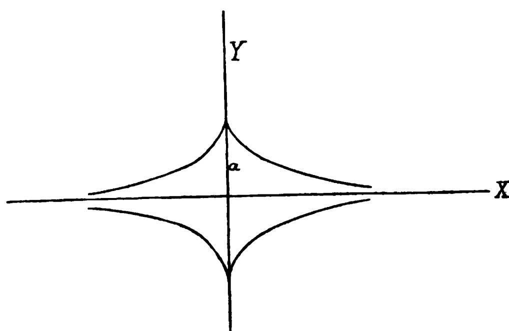
63) **Aufg.** Es soll die Traktrix von Huygens untersucht werden.

Lös. Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass für jeden Punkt derselben das Stück der Tangente, gerechnet vom Berührungs-

punkt bis zum Schnitt mit der X-Axe, die konstante Länge a hat. Demnach ist

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

je nachdem x negativ oder positiv ist.



Die endliche Gleichung ist

$$\pm x = \sqrt{a^2-y^2} - a\,l\left(\pm\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right),$$

je nachdem y positiv oder negativ ist.

Hierbei liegt der Anfangspunkt der Koordinaten in demjenigen Punkte, in welchem die Tangente der Kurve die X-Axe unter rechtem Winkel schneidet.

Ferner wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2};$$

$$T = a, \qquad S_t = \sqrt{a^2-y^2},$$

$$N = \frac{ay}{\sqrt{a^2-y^2}}, \qquad S_n = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

$$\varrho = a\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

$$X = \mp a\,l\left(\pm\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right), \qquad Y = \frac{a^2}{y}.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$Y = \pm\frac{a}{2}\left(e^{\frac{X}{a}} + e^{-\frac{X}{a}}\right).$$

Die Evolute besteht also aus zwei Kettenlinien, von welchen die eine über, die andere unter der Abszissenaxe liegt.

Die Kurve hat vier Äste, welche bei den Punkten

$$\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=a \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=-a \end{Bmatrix}$$

Rückkehrpunkte oder Spitzen der ersten Art bilden. Die X-Axe ist zugleich Asymptote der Kurve.

5. Spiralen.

64) **Aufg.** Untersuchung der Spiralen im allgemeinen.

Lös. Für die Kurven, die die Gleichung $r = a\varphi^n$ haben, als deren Spezialfälle sich die in den folgenden Aufgaben zu behandelnden Kurven herausstellen werden, ist

die Polarsubtangente

$$= r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{n}\varphi^{n+1},$$

die Polartangente

$$= r \cdot \sqrt{1 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = \frac{a}{n} \cdot \varphi^n \cdot \sqrt{n^2 + \varphi^2},$$

die Polarsubnormale

$$= \frac{dr}{d\varphi} = n \cdot a \cdot \varphi^{n-1} = \frac{nr}{\varphi},$$

die Polarnormale

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = a \cdot \varphi^{n-1} \cdot \sqrt{n^2 + \varphi^2}.$$

$$\varrho = \frac{r \cdot (n^2 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi \cdot (\varphi^2 + n^2 + n)}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

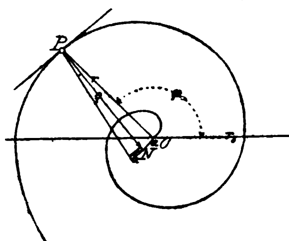
$$X = \frac{n \cdot r \cdot [\varphi \cdot \cos\varphi - (n^2 + \varphi^2) \cdot \sin\varphi]}{\varphi \cdot (\varphi^2 + n^2 + n)},$$

$$Y = \frac{n \cdot r \cdot [\varphi \cdot \sin\varphi + (n^2 + \varphi^2) \cdot \cos\varphi]}{\varphi \cdot (\varphi^2 + n^2 + n)}.$$

Eine Asymptote im Endlichen existiert nur für $n = -1$. (Vergl. Aufg. 66.)

65) Aufg. Es soll die archimedische Spirale untersucht werden.

Lös. Wenn eine gerade Linie um einen festen Endpunkt gleichmässig bewegt wird, und wenn man zugleich auf dieser Linie einen Punkt von dem festen Endpunkt aus sich gleichförmig fortbewegen lässt, so beschreibt dieser Punkt die archimedische Spirale. Ihre Gleichung ist



$$r = a\varphi, \quad \frac{dr}{d\varphi} = a, \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 0,$$

wo φ sich auf den Bogen eines Kreises mit dem Radius 1 bezieht.

Nimmt man an, dass der Punkt den Weg r_0 zurückgelegt habe, während die bewegliche Gerade eine ganze Umdrehung gemacht hat, so ist

$$r_0 = 2a\pi, \quad \text{also} \quad a = \frac{r_0}{2\pi}.$$

Die Polarsubtangente wird

$$\mathfrak{S}_t = r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{a}$$

und die Polarsubnormale

$$\mathfrak{S}_n = \frac{dr}{d\varphi} = a.$$

Da die Polarsubnormale konstant ist, so lässt sich in jedem beliebigen Punkte der Kurve die Tangente leicht konstruieren.

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird

$$= \frac{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{(\varphi^2+2)} = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}.$$

Dieser letztere Ausdruck lässt sich leicht konstruieren.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = \frac{a[\varphi \,.\, \cos\varphi - (1+\varphi^2) \,.\, \sin\varphi]}{(\varphi^2+2)},$$

$$Y = \frac{a[\varphi \,.\, \sin\varphi + (1+\varphi^2) \,.\, \cos\varphi]}{(\varphi^2+2)}.$$

Je grösser φ wird, um so mehr nähern sich diese Grössen den Werten

$$X = -a \sin \varphi,$$
$$Y = a \cos \varphi,$$

woraus folgt

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

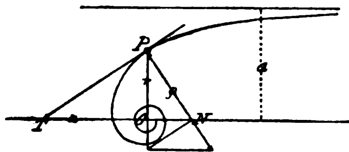
d. h. die Evolute der archimedischen Spirale nähert sich asymptotisch dem Kreise, dessen Mittelpunkt der Pol und dessen Radius $= a$ ist.

66) Aufg. Untersuchung der hyperbolischen Spirale.

Lös. Die Gleichung der hyperbolischen Spirale ist

$$r\varphi = a.$$

Beschreibt man demnach um den Pol als Zentrum eine Schar von Kreisen und trägt auf denselben von der Polaraxe aus nach derselben Seite hin Bogen von der Länge a ab, so ist der geometrische Ort der Endpunkte eine hyperbolische Spirale. Für dieselbe ist der Pol ein asymptotischer Punkt, um welchen die Kurve unendlich viele Windungen macht, ohne ihn für endliche Werte von φ je zu erreichen.



Es wird

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{r^2}{a},$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{2a}{\varphi^3} = \frac{2r^3}{a^2},$$

$$\varrho = \frac{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^4} = r\left(\frac{r^2+a^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{r}{\cos^3 OTP},$$

wenn O den Pol, P den Kurvenpunkt und T den Schnittpunkt der Tangente mit dem in O auf den Radius vector gefällten Lote bezeichnet. Der letztere Ausdruck ist leicht zu konstruieren.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = -\frac{r[\varphi \cdot \cos\varphi - (1+\varphi^2) \cdot \sin\varphi]}{\varphi^3},$$

$$Y = -\frac{r[\varphi \cdot \sin\varphi + (1+\varphi^2) \cdot \sin\varphi]}{\varphi^3}.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{S}_t = -a,$$

$$\mathfrak{S}_n = -\frac{r}{\varphi} = -\frac{r^2}{a}.$$

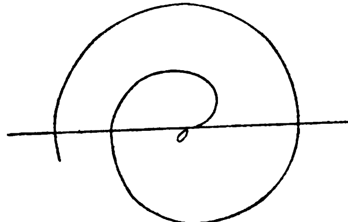
Errichtet man im Pol Senkrechte auf die Leitstrahlen und bringt dieselben zum Schnitt mit den zugehörigen Tangenten, so ist der Ort der Schnittpunkte ein Kreis vom Radius a, dessen Mittelpunkt der Pol ist.

Damit die Kurve eine Asymptote habe, muss die Subtangente $\frac{r^2\,d\varphi}{d\,r}$ für ein unendlich gross werdendes r einen endlichen Wert haben; sie wird aber $= -a$, und da zugleich für ein unendlich grosses r aus der Gleichung der Kurve sich $\varphi = 0$ ergibt, so folgt, dass die hyperbolische Spirale eine Asymptote hat, die mit der X-Axe oder mit der Linie, von welcher ab die Winkel φ gezählt werden, parallel geht und zwar in der Entfernung a.

67) Aufg. Es soll die parabolische Spirale untersucht werden.

Lös. Die parabolische Spirale hat die Gleichung

$$r^2 = a^2 \,.\, \varphi.$$



Der Name der Kurve rührt, analog wie der der soeben behandelten, daher, dass dieselbe in Beziehung auf die Peripherie des Kreises vom Radius 1 als Abszissenaxe und die nach dem Zentrum gerichteten Normalen als Ordinaten nach demselben Gesetze konstruiert wird, wie die gewöhnliche Parabel.

$$\frac{d\,r}{d\varphi} = \frac{a^2}{2\,r} = \frac{a}{2\sqrt{\varphi}},$$

$$\frac{d^2\,r}{d\varphi^2} = -\frac{a}{4\varphi^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r}{4\varphi^2} = -\frac{a}{4\,r^3};$$

$$\varrho = \frac{r\,(1+4\,\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\varphi\,.\,(3+4\,\varphi^2)} = \frac{a\,(1+4\,\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\varphi}\,(3+4\,\varphi^2)}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$X = \frac{r \,.\, [4\,\varphi \,.\, \cos\varphi - (1 + 4\,\varphi^2) \,.\, \sin\varphi]}{2\,\varphi \,.\, (3 + 4\,\varphi^2)},$$

$$Y = \frac{r \,.\, [4\,\varphi \,.\, \sin\varphi + (1 + 4\,\varphi^2) \,.\, \cos\varphi]}{2\,\varphi \,.\, (3 + 4\,\varphi^2)}.$$

Die Länge der Polarsubtangente wird

$$= 2\,a\,\varphi^{\frac{3}{2}} = \frac{2\,r^3}{a^2};$$

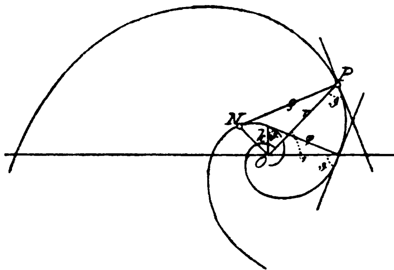
die Länge der Polarsubnormale wird

$$= \frac{a}{2\sqrt{\varphi}} = \frac{a^2}{2r}.$$

Da r und φ zugleich unendlich werden, existiert keine Asymptote.

68) Aufg. Untersuchung der logarithmischen Spirale.

Lös. Diese Spirale ist nicht unter den bisher behandelten mitbegriffen, sondern unterscheidet sich von diesen wesentlich dadurch, dass in ihrer Gleichung φ als Exponent einer konstanten Basis erscheint, während in den Gleichungen der früheren Spiralen diese Grösse zu einer Potenz mit konstantem Exponenten erhoben wurde. Die Gleichung der Kurve wird



$$r = a^\varphi,$$

und es wächst daher der Radius vector in geometrischer Proportion, wenn φ arithmetisch fortschreitet.

Aus der Kurvengleichung folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = l\,a \,.\, a^\varphi, \qquad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = (l\,a)^2 \,.\, a^\varphi,$$

oder

$$\frac{dr}{d\varphi} = k \,.\, a^\varphi = k\,r, \qquad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = k^2 \,.\, a^\varphi = k^2 r,$$

wenn man mit k den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet.

Die Länge der Polarsubtangente wird $= \frac{1}{k} \cdot r$,

" " " Polartangente " $= \frac{r}{k} \sqrt{1 + k^2}$,

" " " Polarsubnormale " $= k \cdot r$,

" " " Polarnormale " $= r \cdot \sqrt{1 + k^2}$.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass sowohl der Ort der zweiten Endpunkte (den Pol als ersten Endpunkt betrachtet) der Polarsubnormalen, als auch der Polarsubtangenten wieder eine logarithmische Spirale ist, welche der ursprünglichen kongruent, aber gegen dieselbe um einen bestimmten Winkel gedreht ist.

Die trigonometrische Tangente des Winkels ϑ, den die Tangente mit dem Radius vector des Berührungspunktes bildet, ist $= \frac{1}{k}$, also konstant.

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= r \cdot \sqrt{1 + k^2} = \mathfrak{N}$. Da $\varrho = \mathfrak{N}$, so stimmt die Evolute der logarithmischen Spirale mit dem soeben erwähnten geometrischen Ort der zweiten Endpunkte der Polarnormalen überein. Man findet übrigens als Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$X = -k \cdot a^{\varphi} \cdot \sin \varphi,$$
$$Y = k \cdot a^{\varphi} \cdot \cos \varphi.$$

Die Gleichung der Evolute wird

$$\frac{1}{k} \cdot l\left(\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{k}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{X}{Y}\right),$$

oder wenn man $Y = r' \cdot \cos \varphi'$ und $X = r' \cdot \sin \varphi'$ setzt, $r' = k \cdot a^{2\pi - \varphi}$ oder noch einfacher, wenn man $Y = k v' \cdot \cos \psi'$ und $X = -k v' \cdot \sin \psi'$ setzt: $v' = a^{\psi'}$.

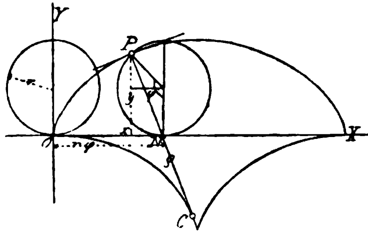
Dies ist in der That die Gleichung einer logarithmischen Spirale, welche der vorgelegten kongruent ist. (Vergl. Aufg. 49.)*)

*) Die logarithmische Spirale liess sich der 1705 verstorbene Jac. Bernoulli auf seinen Grabstein setzen mit der Inschrift: „Eadem mutata resurgo“, um der Nachwelt nicht nur eine seiner schönsten Arbeiten, sondern auch seinen Glauben an die Unsterblichkeit der Seele in Erinnerung zu bringen.

6. Zykloiden.

69) **Aufg.** Es soll die **gewöhnliche** (gemeine) **Zykloide** untersucht werden.

Lös. Wenn ein Kreis mit dem Radius r auf einer geraden Linie fortrollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein bestimmter Punkt in der Peripherie des Kreises die gewöhnliche (gemeine) Zykloide. Beim Anfange des Rollens möge der bestimmte Punkt auf der Geraden liegen. Dieser sei der Anfangspunkt des Koordinatensystems, die gegebene gerade Linie die X-Axe und die darauf senkrechte Gerade die Y-Axe.



Derjenige Kurvenzug, der entstanden ist, indem der rollende Kreis seine Peripherie einmal auf der Basis abgewickelt hat, wiederholt sich bei der fortgesetzten Bewegung unendlich oft. Die Kurve besteht sonach aus unendlich vielen kongruenten Kurvenzügen. In jedem Punkte, wo sich zwei Züge aneinander anschliessen, besitzt sie eine Spitze erster Art. (Vergl. Aufg. 34.)

Die Zykloide wird entweder durch das System der beiden Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r(1 - \cos\varphi),$$

oder durch die Gleichung

$$x = r \operatorname{arc} \cos \frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}$$

dargestellt.

Die erste Darstellungsweise, die hier allein berücksichtigt werden soll, liefert:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1 - \cos\varphi) = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r \sin\varphi = 2r \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2};$$

somit ist

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus erkennt man leicht, dass die Normale der Kurve durch den jeweiligen Berührungspunkt des erzeugenden Kreises mit der X-Axe (vergl. Aufg. 5) und die Tangente durch den höchsten Punkt dieses nämlichen Kreises geht.

$$d\,s = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}\,d\,\varphi,$$

$$N = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\varrho = -4\,r \sin\frac{\varphi}{2};$$

folglich ist der Krümmungsradius, absolut genommen, gleich der doppelten Normale.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\,(\varphi + \sin\varphi),$$
$$Y = r\,(\cos\varphi - 1).$$

Setzt man

$$X = X' - r\,\pi, \quad Y = Y' - 2\,r, \quad \varphi = \psi - \pi,$$

so folgt

$$X' = r\,(\psi - \sin\psi),$$
$$Y' = r\,(1 - \cos\psi),$$

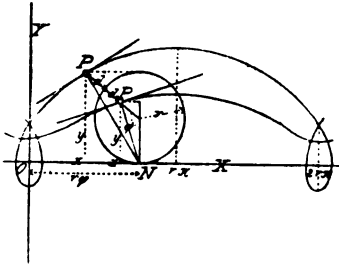
woraus erhellt, dass die Evolute der Zykloide wieder eine der ursprünglichen kongruente Zykloide ist.

70) Aufg. Untersuchung der gedehnten und verkürzten Zykloide.

Lös. Wenn auf einer festen Geraden ein Kreis rollt, so beschreibt ein Punkt P_1, der auf einem bestimmten Radius innerhalb des Kreises liegt, eine gedehnte, und ein Punkt P_2, der auf der Verlängerung dieses Radius liegt, eine verkürzte Zykloide.*) Denkt man sich nun den rollenden Kreis zuerst in einer solchen Lage, dass der Radius, auf welchem der beschreibende Punkt liegt,

*) Weissenborn nennt in seiner interessanten Schrift: „Die zyklischen Kurven“, Eisenach 1856, die gedehnte Zykloide „verkürzte“, die verkürzte „verlängerte“.

senkrecht auf der zur **Basis** dienenden Geraden steht, so wähle man den verlängerten Radius in dieser Lage zur Ordinaten-, die Basis selbst zur Abszissen- oder X-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Nennt man alsdann bei irgend einer Lage des gerollten Kreises den Winkel zwischen dem Radius mit dem beschreibenden Punkte und dem mit der Y-Axe parallelen Radius φ, so erhält man für die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve



$$x = r\varphi - (r \mp d) \sin\varphi,$$
$$y = r \quad - (r \mp d) \cos\varphi,$$

wo $(r \mp d)$ die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Zentrum des beweglichen Kreises bedeutet. Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Grösse φ, so folgt als Gleichung der Kurve

$$x = \operatorname{arc\,cos} \frac{r - y}{r \mp d} - \sqrt{(2r \mp d - y)(y \mp d)}\,.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt $r \mp d = a$; dann wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = r - a\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die Normale im Punkte P durch den diesem Punkte entsprechenden Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Basis geht. (Vergl. Aufg. 5). In der That ist die Länge der Normale

$$N = \sqrt{r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2}$$

gleich der Länge einer Dreieckseite, wenn die beiden anderen Dreieckseiten r und a sind und den Winkel φ einschliessen.

Der Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{(r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a(r\cos\varphi - a)}\,.$$

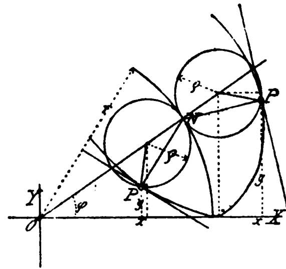
Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\varphi + r\sin\varphi \frac{r - a\cos\varphi}{a - r\cos\varphi}\,,$$

$$Y = \frac{r(r - a\cos\varphi)^2}{a(r\cos\varphi - a)}\,.$$

71) **Aufg.** Untersuchung der einfachen **Epizykloide** und **Hypozykloide.**

Lös. Wenn die Basis, auf der ein Kreis rollt, nicht eine gerade Linie, sondern wieder ein anderer Kreis ist, so beschreibt ein bestimmter Punkt des rollenden Kreises eine Kurve, die Epizykloide oder Hypozykloide genannt wird, je nachdem jener Kreis auf der äusseren oder inneren Seite des festen Kreises rollt, d. h. je nachdem die beiden Kreise sich von aussen oder von innen berühren.*) Denkt man sich nun zunächst bei der Epizykloide die beiden Kreise in solcher Lage, dass der für die Beschreibung der Kurve auf der Peripherie des rollenden Kreises befindliche Punkt in der Peripherie des festen Kreises liegt, so soll der von hier ausgehende Durchmesser des festen Kreises zur X-Axe und der Mittelpunkt desselben zum Anfangspunkt der Koordinaten genommen werden. Der Radius des festen Kreises heisse r, der des rollenden ϱ, Für irgend eine von der Anfangslage verschiedene Lage des rollenden Kreises werde noch der Winkel, der von der Zentrallinie beider Kreise und von der X-Axe gebildet wird, mit φ bezeichnet, dann wird die Epizykloide durch das System folgender beiden Gleichungen dargestellt:



$$x = (r + \varrho) \cdot \cos\varphi - \varrho \cdot \cos\left(\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right),$$

$$y = (r + \varrho) \cdot \sin\varphi - \varrho \cdot \sin\left(\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right).$$

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Hypozykloide ergeben sich aus diesen Gleichungen, wenn man $-\varrho$ an die Stelle von ϱ setzt, nämlich:

---

*) Weissenborn macht in der oben angeführten Schrift „die zyklischen Kurven" bei der inneren Berührung der beiden Kreise einen Unterschied, je nachdem der feste oder der rollende Kreis der grössere ist und nennt hiernach die Kurve „Hypozykloide" oder „Perizykloide".

$$x = (r - \varrho) \,.\, \cos\varphi + \varrho \,.\, \cos\left(\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi\right),$$

$$y = (r - \varrho) \,.\, \sin\varphi + \varrho \,.\, \sin\left(\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Hypozykloide r, ϱ identisch ist mit der Hypozykloide r, $r - \varrho$ oder mit der Epizykloide r, $\varrho - r$, je nachdem $\varrho \lessgtr r$ ist.

In allen nächsten Formeln bezieht sich das obere Zeichen auf die Epizykloide, das untere dagegen auf die Hypozykloide.

Es wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = -(r \pm \varrho) \,.\, \sin\varphi \pm (r \pm \varrho) \,.\, \sin\left(\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi\right) =$$

$$= \pm 2(r \pm \varrho) \,.\, \cos\left(\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi\right) \,.\, \sin\left(\frac{r}{2\varrho}\varphi\right) =$$

$$= \pm \frac{r \pm \varrho}{\varrho}(r \,.\, \sin\varphi - y),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (r \pm \varrho) \,.\, \cos\varphi - (r \pm \varrho) \,.\, \cos\left(\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi\right) =$$

$$= 2(r \pm \varrho) \,.\, \sin\left(\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi\right) \,.\, \sin\left(\frac{r}{2\varrho}\varphi\right) =$$

$$= \pm \frac{r \pm \varrho}{\varrho}(-r \,.\, \cos\varphi + x).$$

Die Normale in irgend einem Punkte der Kurve geht durch den entsprechenden Berührungspunkt des rollenden mit dem Basiskreise. (Vergl. Aufg. 5.) Aus den vorstehenden Gleichungen folgt

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \pm \operatorname{tang}\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi = -\frac{r\cos\varphi - x}{r\sin\varphi - y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r \pm 2\varrho}{4\varrho(r \pm \varrho)} \cdot \frac{1}{\left[\cos\left(\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi\right)\right]^3 \sin\left(\frac{r}{2\varrho}\varphi\right)}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{4\varrho(r \pm \varrho)}{r \pm 2\varrho}\sin\left(\frac{r}{2\varrho}\varphi\right).$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = \frac{r}{r \pm 2\varrho}\left[(r \pm \varrho)\cos\varphi \pm \varrho\cos\left(\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi\right)\right],$$

$$Y = \frac{r}{r \pm 2\varrho}\left[(r \pm \varrho)\sin\varphi + \varrho\sin\left(\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi\right)\right].$$

Das System dieser beiden Gleichungen stellt die Evolute dar, welche offenbar wieder entsprechend eine Epizykloide oder Hypozykloide ist. Um diese Gleichungen auf die Form der oben gegebenen Gleichungen zurückzuführen, setze man

$$X = X'\cos\left(\frac{\varrho\pi}{r}\right) \mp Y'\sin\left(\frac{\varrho\pi}{r}\right),$$

$$Y = \pm X'\sin\left(\frac{\varrho\pi}{r}\right) + Y'\cos\left(\frac{\varrho\pi}{r}\right),$$

$$\varphi = \varphi' \pm \frac{\varrho\pi}{r}, \qquad r = r' \pm 2\varrho', \qquad \varrho = \varrho'\frac{r' \pm 2\varrho'}{r'};$$

dann wird

$$X' = (r' \pm \varrho') \,.\, \cos\varphi' \mp \varrho' \,.\, \cos\left(\frac{r' \pm \varrho'}{\varrho'}\varphi'\right),$$

$$Y' = (r' \pm \varrho') \,.\, \sin\varphi' - \varrho' \,.\, \sin\left(\frac{r' \pm \varrho'}{\varrho'}\varphi'\right).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $\frac{r'}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho}$ d. h. dass das Verhältnis des Radius des rollenden Kreises zu dem des festen Kreises bei der Epi- und Hypozykloide dasselbe ist, wie das der Kreise, die ihre Evoluten erzeugen.

Anmerkung. Da der Punkt des rollenden Kreises, welcher beim Anfang der Bewegung auf der Peripherie des festen Kreises lag, bei der beständig fortgesetzten Bewegung unendlich oft wieder die Peripherie des festen Kreises treffen muss, so wird die Kurve aus unendlich vielen unter sich kongruenten Zügen bestehen, die nur dann zu einem gewissen Abschluss kommen werden, wenn das Verhältnis der Radien r und ϱ beider Kreise ein rationales ist, weil alsdann der beschreibende Punkt nach einer hinreichenden Anzahl von Revolutionen wieder an dieselbe Stelle gelangen wird, von welcher er ausgegangen ist. Ist $\frac{r}{\varrho} = \frac{m}{n}$, wobei m und n

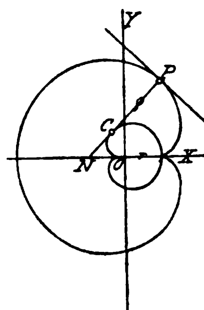
ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler seien, so muss der rollende Kreis die Peripherie des festen n mal durchmessen, sich also m mal um seinen eigenen Mittelpunkt drehen, bis der die Kurve beschreibende Punkt zum ersten Mal in seine Anfangslage zurückkehrt. Überall da, wo der beschreibende Punkt auf die Peripherie des Grundkreises gelangt, besitzt die Kurve eine Spitze erster Art. — Einzelne Beispiele von rationalen Verhältnissen der Radien beider Kreise mögen hier folgen.

72) Aufg. Untersuchung der Kardioide.

Wenn die beiden Radien einander gleich sind, also $\varrho = r$, so entsteht als Epizykloide die sogenannte Kardioide.

Ein beliebiger Punkt derselben ist nach dem Vorhergehenden bestimmt durch die Gleichungen

$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi,$$
$$y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi.$$



Hieraus folgt

$$\frac{dx}{d\varphi} = -2r\sin\varphi + 2r\sin 2\varphi = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{3}{2}\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = 2r\cos\varphi - 2r\cos 2\varphi = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{3}{2}\varphi,$$
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\tfrac{3}{2}\varphi,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8r(\cos\frac{3}{2}\varphi)^3\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Da y mit φ sein Zeichen wechselt, x dagegen nicht, so ist die Kurve symmetrisch in Bezug auf die X-Axe.

Der höchste Punkt $x = -\frac{1}{2}r$, $y = \frac{3}{2}r\sqrt{2}$ ergibt sich für $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, der tiefste Punkt $x = -\frac{1}{2}r$, $y = -\frac{3}{2}r\sqrt{2}$ für $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$.

Für $\varphi = 0$ wird $x = r$, $y = 0$, und da für diesen Punkt die Tangente mit der X-Axe zusammenfällt, so ist er ein Rückkehrpunkt der ersten Art. Die Punkte $\varphi = \pi$, $x = -3r$, $y = 0$ und $\varphi = \pm\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}r$, $y = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ sind am weitesten von der Y-Axe entfernt; in denselben sind die Tangenten der Y-Axe parallel.

Eliminiert man aus den Gleichungen für x und y die Grösse φ, so ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 8r^3x - 3r^4 = 0.$$

Für diese Gleichung lag der Anfangspunkt der Koordinaten in dem Mittelpunkte des festen Kreises; verlegt man ihn aber nach der Peripherie des Kreises und nimmt die X-Axe in umgekehrten Sinn, indem man $r - \xi$ für x setzt, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$(\xi^2 + y^2)^2 - 4 r \xi (\xi^2 + y^2) - 4 r^2 y^2 = 0;$$

oder endlich, wenn man die gewöhnlichen Polarkoordinaten, also $y = u \,.\, \sin t$ und $\xi = u \,.\, \cos t$ einführt

$$u = 2 r (1 + \cos t).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass zwei Radienvektoren, die entgegengerichtet sind, sich zu $2 r$ ergänzen.

Ferner ist $\operatorname{tang} \vartheta = - \operatorname{cotang} \frac{t}{2}$, folglich $\vartheta = 90^0 + \frac{t}{2}$.

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{8}{3} r \,.\, \sin \frac{1}{2} \varphi$.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = \frac{1}{3} r (2 \cos \varphi + \cos 2 \varphi),$$
$$Y = \frac{1}{3} r (2 \sin \varphi + \sin 2 \varphi).$$

Durch diese Gleichungen ist zugleich die Evolute bestimmt. Setzt man $X = -X'$, $Y = -Y'$, $\varphi = \varphi' + \pi$, so wird

$$X' = \frac{1}{3} r (2 \cos \varphi' - \cos 2 \varphi'),$$
$$Y' = \frac{1}{3} r (2 \sin \varphi' - \sin 2 \varphi').$$

Diese Gleichungen stellen eine neue Kardioide dar, in welcher sowohl der Radius des festen Kreises, als der des rollenden der dritte Teil von dem ursprünglichen Radius ist.

73) Aufg. Untersuchung der Epizykloide $\varrho = \frac{1}{2} r$.

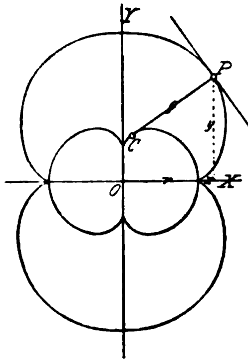
Wenn der Radius des rollenden Kreises die Hälfte von dem des festen ist, also $\varrho = \frac{1}{2} r$, so wird ein beliebiger Punkt der Epizykloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \frac{3}{2} r \cos \varphi - \frac{1}{2} r \cos 3 \varphi,$$
$$y = \frac{3}{2} r \sin \varphi - \frac{1}{2} r \sin 3 \varphi.$$

Wenn man $\cos 3 \varphi$ und $\sin 3 \varphi$ durch den einfachen Winkel ausdrückt und dann φ eliminiert, so erhält man als Gleichung der Kurve

$$4 (x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27 r^4 y^2.$$

Es wird



$$\frac{dx}{d\varphi} = 3\,r\cos 2\varphi\,.\,\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3\,r\sin 2\varphi\,.\,\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} 2\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3\,r\,(\cos 2\varphi)^3\,.\,\sin\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ wird

$$= \tfrac{3}{2}\,r\sin\varphi.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = \tfrac{1}{2}\,r\,(\tfrac{3}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 3\varphi),$$

$$Y = \tfrac{1}{2}\,r\,(\tfrac{3}{2}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 3\varphi).$$

Die Gleichung der Evolute, welche durch die Elimination des Winkels φ aus diesen beiden Gleichungen erhalten wird, lautet:

$$(4\,X^2 + 4\,Y^2 - r^2)^3 = 27\,r^4\,X^2.$$

Setzt man $r = 2\,r'$, $\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{2}\pi$, $X = -Y'$, $Y = X'$, so nehmen die vorangehenden drei Gleichungen folgende Gestalt an:

$$X' = r'\,(\tfrac{3}{2}\cos\varphi' - \tfrac{1}{2}\cos 3\varphi'),$$

$$Y' = r'\,(\tfrac{3}{2}\sin\varphi' - \tfrac{1}{2}\sin 3\varphi')$$

und

$$64\,(X'^2 + Y'^2 - r'^2)^3 = 27\,r'^4\,Y'^2.$$

Diese Gleichungen stellen eine Epizykloide dar, welche der gegebenen ähnlich ist und bei welcher der Radius des festen Kreises halb so gross ist, als der Radius des ursprünglich gegebenen festen Kreises.

74) Aufg. Untersuchung der Hypozykloide $\varrho = \tfrac{1}{2}\,r$.

Wenn der Radius des rollenden Kreises wieder halb so gross ist wie der Radius des festen, der bewegliche Kreis aber innerhalb des festen rollt, so wird jeder Punkt der Hypozykloide bestimmt durch:

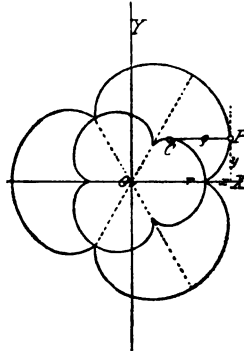
$$x = r\cos\varphi; \quad y = 0,$$

d. h. die Kurve wird die Abszissenaxe, also ein Durchmesser des festen Kreises.

75) **Aufg.** Untersuchung der **Epizykloide** $\varrho = \frac{1}{3} r$.

Wenn der Radius des rollenden Kreises der dritte Teil vom Radius des festen Kreises ist, so ist die Epizykloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{3} r \,(4 \cos \varphi - \cos 4 \varphi),$$
$$y = \tfrac{1}{3} r \,(4 \sin \varphi - \sin 4 \varphi);$$



ferner wird

$$\frac{dx}{d\varphi} = \tfrac{8}{3} r \,.\, \cos \tfrac{5}{2} \varphi \,.\, \sin \tfrac{3}{2} \varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = \tfrac{8}{3} r \,.\, \sin \tfrac{5}{2} \varphi \,.\, \sin \tfrac{3}{2} \varphi,$$
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \tfrac{5}{2} \varphi,$$
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{15}{16 \, r \,(\cos \frac{5}{2} \varphi)^3 \,.\, \sin \frac{3}{2} \varphi}\,.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ wird $= \frac{16}{15} r \sin \frac{3}{2} \varphi$.

$$X = \tfrac{1}{5} r \,(4 \cos \varphi + \cos 4 \varphi),$$
$$Y = \tfrac{1}{5} r \,(4 \sin \varphi + \sin 4 \varphi),$$

welche Gleichungen die Evolute darstellen.

Durch die Substitution

$$X = \tfrac{1}{2} X' - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, Y', \qquad Y = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, X' + \tfrac{1}{2} Y',$$
$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{3} \pi, \qquad r = \tfrac{5}{3} r',$$

nehmen sie die Gestalt der gegebenen Gleichungen an.

$$X' = \tfrac{1}{3} r' \,(4 \cos \varphi' - \cos 4 \varphi'),$$
$$Y' = \tfrac{1}{3} r' \,(4 \sin \varphi' - \sin 4 \varphi').$$

76) **Aufg.** Untersuchung der **Hypozykloide** $\varrho = \frac{1}{3} r$.

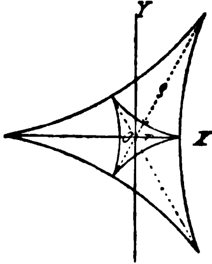
Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises der dritte Teil von dem Radius des festen Kreises ist, der erste aber auf der inneren Seite des letzteren rollt, so wird die Hypozykloide dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{3} r \,(2 \cos \varphi + \cos 2 \varphi),$$
$$y = \tfrac{1}{3} r \,(2 \sin \varphi - \sin 2 \varphi),$$

oder nach Elimination des Winkels φ durch die Gleichung

$$3 \,(r^2 + x^2 + 4 r x + y^2)^2 = 4 r \,(r + 2 x)^3.$$

Hierbei wird



$$\frac{dx}{d\varphi} = -\tfrac{4}{3}\, r \cos \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, \sin \tfrac{3}{2}\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \tfrac{4}{3}\, r \sin \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, \sin \tfrac{3}{2}\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{8\, r (\cos \frac{1}{2}\varphi)^3 \,.\, \sin \frac{3}{2}\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \tfrac{8}{3}\, r \sin \tfrac{3}{2}\varphi$.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = r \,.\, (2 \cos \varphi - \cos 2\varphi),$$
$$Y = r \,.\, (2 \sin \varphi + \sin 2\varphi).$$

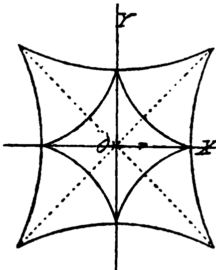
Diese Gleichungen bestimmen jeden beliebigen Punkt der Evolute, welche wie in allen vorhergehenden Beispielen wieder eine der ursprünglichen ähnliche Kurve ist.

77) Aufg. Untersuchung der Asteroide.

Wenn der Radius des rollenden Kreises der vierte Teil von dem Radius des festen Kreises ist und der erstere auf der inneren Seite des letzteren rollt, so wird die entstehende Hypozykloide (eine sogenannte Asteroide) gegeben durch die beiden Gleichungen

$$x = r \cos^3 \varphi, \quad y = r \sin^3 \varphi,$$

oder nach Elimination der Grösse φ durch die eine Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$. (Vergl. Aufg. 1 und 91.)



Hieraus folgt

$$\frac{dx}{d\varphi} = -3\, r \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3\, r \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} \varphi.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\alpha = \pi - \varphi$, und es lässt sich somit die Tangente in jedem Punkte der Kurve leicht konstruieren.

Ferner wird

$$d s = 3 r \sin \varphi \cos \varphi \, d \varphi,$$
$$\varrho = 3 r \sin \varphi \cos \varphi = \tfrac{3}{2} r \sin 2 \varphi.$$

Die Evolute wird dargestellt durch die Gleichungen

$$X = r \cos \varphi (\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi),$$
$$Y = r \sin \varphi (\sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi).$$

Setzt man

$$X = \frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-X' + Y'}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \psi - \frac{\pi}{4},$$

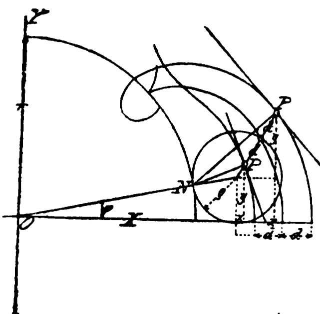
so kommt

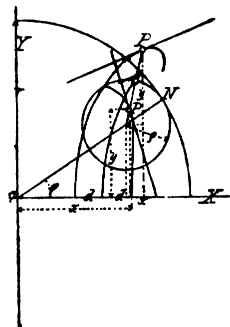
$$X' = 2 r \cos^3 \psi, \quad Y' = 2 r \sin^3 \psi.$$

Es ist somit die Evolute der vorgelegten Kurve ähnlich und entsteht dadurch, dass ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2} r$ auf der inneren Seite eines festen Kreises vom Radius $2 r$ rollt.

Die vorgelegte Kurve ist vollkommen symmetrisch in Bezug auf beide Koordinatenaxen; sie besitzt in den vier Punkten $x = \pm r$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \pm r$ Spitzen erster Art, in welchen die X-, resp. Y-Axe die zugehörigen Tangenten sind.

78) Aufg. Es soll die gedehnte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide untersucht werden.





Lös. Wenn wieder ein gegebener Kreis auf einem anderen gegebenen festen Kreise rollt und wenn mit diesem rollenden Kreise innerhalb oder ausserhalb seiner Peripherie ein Punkt fest ver-

bunden gedacht wird, so beschreibt dieser Punkt eine Epizykloide oder Hypozykloide, je nachdem die Kreise sich von aussen oder von innen berühren, und zwar wird es eine gedehnte oder verkürzte Kurve, je nachdem der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb der Peripherie des bewegten Kreises liegt.

Wenn man sich zunächst die Kreise bei der Berührung von aussen in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in einer geraden Linie liegen, jedoch so, dass der beschreibende Punkt nicht zwischen den beiden Mittelpunkten liegt; wenn man dann diese Linie zur X-Axe annimmt und den Mittelpunkt des festen Kreises zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten; wenn man ferner bei einer beliebigen Lage des rollenden Kreises den Winkel zwischen der Zentrallinie beider Kreise mit der soeben genannten X-Axe mit φ bezeichnet; wenn endlich der Radius des festen Kreises r und der des rollenden Kreises ϱ, sowie die Entfernung des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises und zwar von der Peripherie nach aussen gerechnet, d genannt wird, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Epizykloide bestimmt durch die Gleichungen

$$x = (r+\varrho) \cdot \cos\varphi + (\varrho + d) \cdot \cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r+\varrho) \cdot \sin\varphi + (\varrho + d) \cdot \sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi.$$

Für die gedehnte Epizykloide wird

$$x = (r+\varrho) \cdot \cos\varphi + (\varrho - d) \cdot \cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r+\varrho) \cdot \sin\varphi + (\varrho - d) \cdot \sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi.$$

Indem man nun beide Epizykloiden zusammenfasst, erhält man

$$\frac{dx}{d\varphi} = -(r+\varrho) \cdot \left(\sin\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho}\sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \quad (r+\varrho) \cdot \left(\cos\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho}\cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right);$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varrho \cos\varphi + (\varrho \pm d) . \cos\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi}{\varrho \sin\varphi + (\varrho \pm d) . \sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\varrho^3 + (\varrho \pm d)^2 (r+\varrho) + \varrho(\varrho \pm d)(r + 2\varrho) . \cos\frac{r}{\varrho}\varphi}{\varrho^3 (r+\varrho) . \left(\sin\varphi + \frac{\varrho \pm d}{\varrho} . \sin\frac{r+\varrho}{\varrho}\varphi\right)^3},$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\frac{(r+\varrho)\left[d^2 + 4\varrho(\varrho \pm d)\left(\cos\frac{r\varphi}{2\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3 + (\varrho \pm d)^2 (r+\varrho) + (\varrho \pm d)(r+2\varrho)\varrho\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}.$$

Wenn man sich zweitens bei der Berührung von innen die beiden Kreise anfänglich in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass wieder die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in einer geraden Linie liegen, hier aber so, dass der beschreibende Punkt zwischen die beiden Mittelpunkte fällt, im Übrigen aber die Koordinaten und die anderen Bezeichnungen so wählt, wie vorhin bei der Epizykloide, so wird die Hypozykloide bestimmt durch die Gleichungen

$$x = (r - \varrho)\cos\varphi - (\varrho \pm d)\cos\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi,$$

$$y = (r - \varrho)\sin\varphi + (\varrho \pm d)\sin\frac{r-\varrho}{\varrho}\varphi,$$

wo das obere Zeichen für die verkürzte, das untere für die gedehnte Hypozykloide gültig ist.

Der Krümmungshalbmesser wird

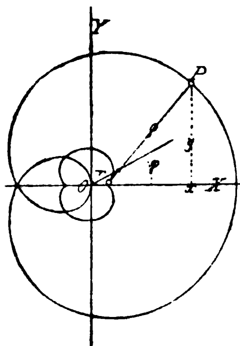
$$\frac{(r-\varrho)\left[d^2 + 4\varrho(\varrho \pm d)\left(\cos\frac{r\varphi}{2\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3 - (\varrho \pm d)^2 (r-\varrho) - (\varrho \pm d)(r-2\varrho)\varrho\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}.$$

Die Ausdrücke für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, bei der Epizykloide sowohl als bei der Hypozykloide, werden so ungefügig, dass die Mühe ihrer Ausrechnung nicht belohnt wird.

Auch hier mögen einzelne Beispiele folgen.

79) **Aufg.** Untersuchung der verkürzten Epizykloide $d = \varrho = r$.

Wenn die Entfernung d des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises gleich dem Radius des rollenden und gleich dem des festen Kreises ist, also $d = \varrho = r$, so soll die verkürzte Epizykloide untersucht werden.



Die Kurve wird dargestellt durch die Gleichungen

$$x = 2r.(\cos\varphi + \cos 2\varphi),$$
$$y = 2r.(\sin\varphi + \sin 2\varphi);$$

oder durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 12r^2(x^2 + y^2) = 16r^3x,$$
$$y = \pm\sqrt{6r^2 - x^2 \pm 2r\sqrt{9r^2 + 4rx}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + 2\cos 2\varphi}{\sin\varphi + 2\sin 2\varphi} = \frac{4r^3 + 6r^2x - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) - 6r^2y} =$$
$$= \frac{2r^2 \mp x\sqrt{9r^2 + 4rx}}{\pm y\sqrt{9r^2 + 4rx}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3(3 + 2\cos\varphi)}{2r(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{2r(5 + 4\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3(3 + 2\cos\varphi)};$$

$$X = \frac{2r(1 + 6\cos\varphi - 4\cos^3\varphi)}{3(3 + 2\cos\varphi)},$$

$$Y = \frac{8r.\sin^3\varphi}{3(3 + 2\cos\varphi)}.$$

Die Kurve hat eine Schleife, welche von $x = 0$ bis $x = -2r$ reicht; in dem Punkte $x = -2r$, $y = 0$ schneiden sich zwei Äste der Kurve, deren Richtungen gegeben sind durch $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$. ($\varphi = \frac{2}{3}\pi$ und $= \frac{4}{3}\pi$.)

80) **Aufg.** Untersuchung der verkürzten Epizykloide $\varrho = \frac{1}{2}r$, $d = d$.

Wenn der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist wie der des festen, also $\varrho = \frac{1}{2} r$, das d aber noch beliebig, so wird die verkürzte Epizykloide dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{3}{2} r \,.\, \cos\varphi + (\tfrac{1}{2} r + d) \,.\, \cos 3\varphi,$$

$$y = \tfrac{3}{2} r \,.\, \sin\varphi + (\tfrac{1}{2} r + d) \,.\, \sin 3\varphi.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r \,.\, \cos\varphi + (r + 2d) \,.\, \cos 3\varphi}{r \,.\, \sin\varphi + (r + 2d) \,.\, \sin 3\varphi} =$$

$$= \operatorname{cotang}\varphi \,.\, \frac{r + 3d - 2(r + 2d)\cos^2\varphi}{2r + 3d - 2(r + 2d)\sin^2\varphi},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{rd + 3d^2 + 2r(r + 2d)\cos^2\varphi}{3\sin^3\varphi\,[d - 2(r + 2d)\cos^2\varphi]^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{3\,[d^2 + r(r + 2d)\cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{rd + 3d^2 + 2r(r + 2d)\cos^2\varphi}.$$

81) **Aufg.** Untersuchung der verkürzten Hypozykloide $\varrho = \frac{1}{2} r$, $d = d$.

Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist wie der des festen, wenn sich die Kreise aber von innen berühren, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Hypozykloide gegeben durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2} r \,.\, \cos\varphi - (\tfrac{1}{2} r + d) \,.\, \cos\varphi = - d \,.\, \cos\varphi,$$

$$y = \tfrac{1}{2} r \,.\, \sin\varphi + (\tfrac{1}{2} r + d) \,.\, \sin\varphi = (r + d) \,.\, \sin\varphi.$$

Die Gleichung der Kurve wird

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{(r + d)^2} = 1,$$

d. h. es ist diese Hypozykloide eine Ellipse, deren halbe kleine Axe $= d$ und deren halbe grosse Axe $= r + d$ ist.

Wenn $d = 0$ wird, geht die Ellipse in denjenigen Durchmesser des Grundkreises über, welcher in der Y-Axe liegt.

82) **Aufg.** Untersuchung der gedehnten Epizykloide $\varrho = r$, $d = -\frac{1}{2} r$.

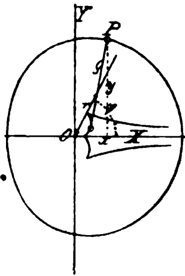
Wenn der Radius des rollenden Kreises gleich dem der Basis, also $\varrho = r$ ist, so sucht man die gedehnte Epizykloide unter der Bedingung, dass der beschreibende Punkt innerhalb des rollenden

Kreises liegt und um dessen halben Radius von der Peripherie entfernt ist, also $d = -\frac{1}{2}\varrho = -\frac{1}{2}r$.

Diese Kurve wird dargestellt durch

$$x = \tfrac{1}{2} r (4 \cos\varphi + \cos 2\varphi),$$
$$y = \tfrac{1}{2} r (4 \sin\varphi + \sin 2\varphi) = r \sin\varphi\,(2 + \cos\varphi),$$

woraus



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos\varphi + \cos 2\varphi}{4\sin\varphi\,.\,(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2r\cos\frac{\varphi}{2}\sin^3\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{r\,(5 + 4\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{12\,(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}.$$

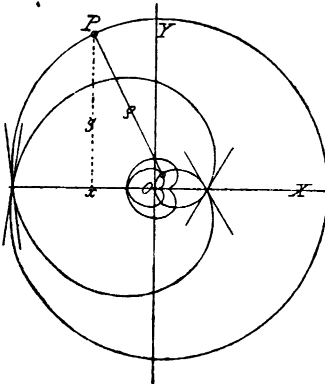
Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = r\,.\,\frac{2 + 3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi}{12\,(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2},$$

$$Y = \tfrac{2}{3} r\,.\,\sin\varphi\,.\,(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2.$$

83) Aufg. Untersuchung der **verkürzten Epizykloide** $\varrho = 2r$, $d = r$.

Wenn die Kreise sich von aussen berühren und der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross als der des festen Kreises, also $\varrho = 2r$, die Distanz des beschreibenden Punktes d aber gleich dem Radius der Basis r ist, so wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Epizykloide gegeben durch



$$x = 3r\,.\,[\cos\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi] =$$
$$= 6r\,.\,\cos\tfrac{5}{4}\varphi\,.\,\cos\tfrac{1}{4}\varphi,$$
$$y = 3r\,.\,[\sin\varphi + \sin\tfrac{3}{2}\varphi] =$$
$$= 6r\,.\,\sin\tfrac{5}{4}\varphi\,.\,\cos\tfrac{1}{4}\varphi,$$

woraus

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\tfrac{5}{4}\varphi.$$

Durch die Elimination des Winkels φ wird als Gleichung der Kurve erhalten

$$(x^2+y^2)\,.\,[(x^2+y^2-18\,r^2)^2-9\,r^2\,(x^2+y^2-9\,r^2)]=486\,r^5\,x.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\varphi+\frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sin\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi},$$

oder

$$\frac{dy}{dx}=\frac{243\,r^5-x\,.\,[3\,(x^2+y^2)^2-90\,r^2\,.\,(x^2+y^2)+405\,r^4]}{y\,[3\,(x^2+y^2)^2-90\,r^2\,.\,(x^2+y^2)+405\,r^4]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{5\,(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}{24\,r\,.\,(\sin\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$=\frac{3\,(13+12\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{5\,(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}\,.\,r.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X=\frac{-3\,(9-6\cos\frac{1}{2}\varphi-36\cos^2\frac{1}{2}\varphi+4\cos^3\frac{1}{2}\varphi+24\cos^4\frac{1}{2}\varphi)}{5\,(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}\,r=$$

$$=\frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi\,(2-\cos\varphi)+9\,(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)}{5\,(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}\,r,$$

$$Y=\frac{12\,r\,.\,\sin^3\frac{1}{2}\varphi\,(1+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}{5\,(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Die Kurve schneidet die X-Axe in vier Punkten, und zwar bei $x=0$, $x=6\,r$, $x=\frac{3}{2}\,r\,(-1\pm\sqrt{5})$. Die Kurve bildet zwei ineinanderliegende Schleifen, denn die beiden Punkte

$$\left\{\begin{matrix} x=\frac{3}{2}\,r\,(-1+\sqrt{5}) \\ y=0 \\ (\varphi=\frac{8}{5}\pi \text{ und } =\frac{12}{5}\pi) \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} x=\frac{3}{2}\,r\,(-1-\sqrt{5}) \\ y=0 \\ (\varphi=\frac{4}{5}\pi \text{ und } =\frac{16}{5}\pi) \end{matrix}\right\}$$

sind Doppelpunkte; die Tangenten im ersten dieser Doppelpunkte sind bestimmt durch

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{5\,(5-2\sqrt{5})}=\pm 5\,\text{tang}\,18^0$$

und im zweiten durch

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}=\pm 5\,\text{cotang}\,36^0.$$

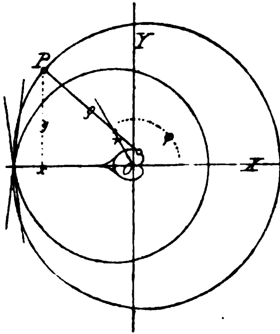
84) **Aufg.** Untersuchung der **gedehnten Epizykloide** $\varrho = 2r$, $d = -r$.

Wenn alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, nur dass der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises liegt, so hat man in der allgemeinen Gleichung der Epizykloide $\varrho = 2r$, $d = -r$ zu setzen und erhält für einen beliebigen Punkt der gedehnten Epizykloide

$$x = r\,.\,[3\cos\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi],$$
$$y = r\,.\,[3\sin\varphi + \sin\tfrac{3}{2}\varphi].$$

Die Gleichung der Kurve wird

$$(x^2 + y^2 - 7r^2)^3 - 27r^4(2x^2 + 2y^2 - 13r^2) = 54r^5 x.$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi}{2\sin\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{27r^5 - x\,.\,[3(x^2+y^2-7r^2)^2 - 54r^4]}{y\,.\,[3(x^2+y^2-7r^2)^2 - 54r^4]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(11 + 10\,.\,\cos\frac{1}{2}\varphi)}{3r\,.\,(2\sin\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{3r\,.\,(5 + 4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{11 + 10\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = \frac{-3 + 6\cos\frac{1}{2}\varphi + 12\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 4\cos^3\frac{1}{2}\varphi - 8\cos^4\frac{1}{2}\varphi}{11 + 10\cos\frac{1}{2}\varphi}\,.\,r =$$
$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\,(2 - \cos\varphi) + 2\cos\varphi - \cos 2\varphi}{11 + 10\cos\frac{1}{2}\varphi}\,.\,r,$$

$$Y = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\varphi\,(1 + 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{11 + 10\cos\frac{1}{2}\varphi}\,.\,r.$$

Die Kurve schneidet die X-Axe in drei Punkten und zwar bei $x = 2r$, $\varphi = \pi$, $x = 4r$, $\varphi = 0$ und $x = -\frac{1}{2}r(3 + \sqrt{13})$, $\varphi = \arccos\left(\frac{7 - 3\sqrt{13}}{4}\right)$. Der Punkt $\left\{\begin{matrix} x = -\frac{1}{2}r(3 + \sqrt{13}) \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ist ein Doppelpunkt; für denselben ist der wahre Wert des in unbestimmter Form erscheinenden Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{13(7+2\sqrt{13})}{3}}.$$

Die Kurve besitzt eine Schleife, welche sich erstreckt von $x = 2r$ bis $x = -\frac{1}{2} r (3 + \sqrt{13})$.

85) **Aufg.** Untersuchung der **verkürzten Hypozykloide** $\varrho = 2r$, $d = r$.

Wenn der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross ist wie der des festen, also $\varrho = 2r$, und wenn sich die Kreise beständig von innen berühren, so wird in diesem Fall der rollende Kreis den festen umschliessen. Die Entfernung des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises sei gleich dem Radius des festen und liege ausserhalb der Peripherie, dann wird ein beliebiger Punkt der verkürzten Hypozykloide bestimmt durch

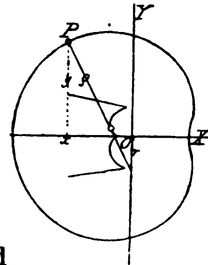
$$x = 3r \cdot \cos \tfrac{1}{2}\varphi - r \cdot \cos\varphi,$$

$$y = 3r \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varphi - r \cdot \sin\varphi.$$

Die Gleichung der Kurve wird

$$[x^2 + y^2 - 10r^2] \cdot [x^2 + y^2 - r^2] + 18r^3(x - r) = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi}{3\sin\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi},$$



oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9r^3 + x[2(x^2+y^2) - 11r^2]}{y[2(x^2+y^2) - 11r^2]},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{17 - 18 \cdot \cos\frac{1}{2}\varphi}{r \cdot (3\sin\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi)^3}.$$

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird

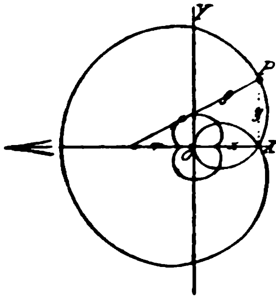
$$= \frac{r(13 - 12\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

$$X = \frac{-3r(3 - 6\cos\frac{1}{2}\varphi + 4\cos^3\frac{1}{2}\varphi)}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

$$Y = \frac{12r \cdot \sin^3\frac{1}{2}\varphi}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

86) **Aufg.** Untersuchung der **gedehnten Hypozykloide** $\varrho = 2r$, $d = -r$.

Wenn mit Beibehaltung derselben Bedingungen wie vorhin der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises und wieder in der Entfernung $= r$ von der Peripherie liegt, so wird die gedehnte Hypozykloide dargestellt durch



$$x = -r\cos\varphi + r\cos\tfrac{1}{2}\varphi =$$
$$= 2r \,.\, \sin\tfrac{3}{4}\varphi \,.\, \sin\tfrac{1}{4}\varphi,$$
$$y = -r\sin\varphi + r\sin\tfrac{1}{2}\varphi =$$
$$= -2r \,.\, \cos\tfrac{3}{4}\varphi \,.\, \sin\tfrac{1}{4}\varphi,$$

oder zwischen rechtwinkligen Koordinaten allein

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 3r^2) + 2r^3 x = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos\varphi + \cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{-2\cos\varphi + \cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi \,.\, (4\cos\frac{1}{2}\varphi - 1)},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r^3 - x \,.\, [3r^2 - 2(x^2 + y^2)]}{y \,.\, [3r^2 - 2(x^2 + y^2)]},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{r \,.\, (2\sin\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi)^3}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{r(5 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

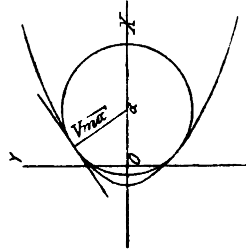
$$X = -\frac{r(1 - 6\cos\frac{1}{2}\varphi + 4\cos^3\frac{1}{2}\varphi)}{3(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)},$$

$$Y = \frac{4r \,.\, \sin^3\frac{1}{2}\varphi}{3(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Die X-Axe wird von der Kurve in drei Punkten geschnitten, bei $x = -2r$ ($\varphi = 2\pi$), bei $x = 0$ ($\varphi = 0$) und bei $x = r$ ($\varphi = \frac{2}{3}\pi$ und $= \frac{10}{3}\pi$). Der Punkt $\begin{Bmatrix} x = r \\ y = 0 \end{Bmatrix}$ ist ein Doppelpunkt; die Richtungen der beiden sich hier schneidenden Äste sind gegeben durch $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$. Auch hat die Kurve eine Schleife in der Ausdehnung von $x = 0$ bis $x = r$.

7. Enveloppen.

87) Aufg. Der Mittelpunkt eines veränderlichen Kreises bewegt sich auf der X-Axe so, dass das Quadrat des Radius in jeder Lage gleich der zugehörigen Abszisse a des Mittelpunktes, multipliziert in eine Konstante m ist; es soll die Kurve gefunden werden, welche alle diese beweglichen Kreise einhüllt.



Lös. Die Gleichung des Kreises in irgend einer Lage wird

$$y^2 + (x - a)^2 - m\,a = 0,$$

also der partielle nach a genommene Differentialquotient

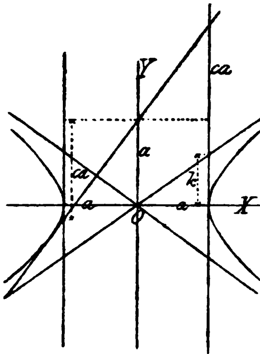
$$-2\,(x - a) - m = 0;$$

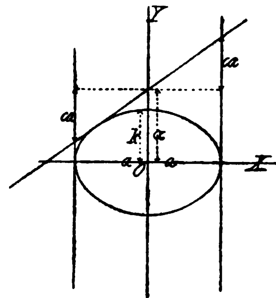
mithin die Gleichung der einhüllenden Kurve

$$y^2 = m\,x + \tfrac{1}{4}\,m^2.$$

Die Enveloppe ist somit eine Parabel.

88) Aufg. In den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie ($= 2\,a$) sind zwei parallele Linien gezogen, und eine andere Gerade bewegt sich stets so, dass das Produkt der durch sie von den





beiden Parallelen abgeschnittenen Stücke einem gegebenen Quadrate k^2 gleich ist; es soll die einhüllende Kurve dieser beweglichen Geraden gefunden werden.

Lös. Wenn die Richtung der gegebenen begrenzten Geraden zur X-Axe und die durch ihre Mitte mit den beiden anderen

gegebenen Geraden parallel gezogene Linie zur Y-Axe angenommen wird und wenn man bei einer bestimmten Lage der beweglichen Linie das Stück, welches sie von der Y-Axe abschneidet, mit a bezeichnet, so werden die beiden Stücke, welche dieselbe von den beiden festen Ordinaten abschneidet,

$$y_1 = a - c\,a; \quad y_2 = a + c\,a,$$

wo c eine noch zu bestimmende Konstante in der allgemeinen Gleichung $y - a = c\,x$ der beweglichen Geraden ist. Aus der Bedingung $y_1\,y_2 = \pm k^2$, folgt $c = \frac{\sqrt{a^2 \mp k^2}}{a}$. Hier gilt das obere Zeichen, wenn die beiden Ordinatenabschnitte y_1 und y_2 beide auf einerlei Seite der Abszissenaxe liegen und das untere, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen. Durch Elimination der Grösse a aus

$$y - a = \frac{x\sqrt{a^2 \mp k^2}}{a} \quad \text{und} \quad -1 = \frac{x\,.\,a}{a\sqrt{a^2 \mp k^2}}$$

erhält man als Gleichung der einhüllenden Kurve entweder

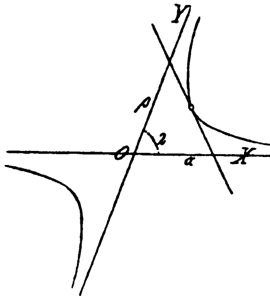
$$\frac{y^2}{k^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ d. h. die Gleichung einer Ellipse,}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1, \text{ d. h. die Gleichung einer Hyperbel.}$$

89) **Aufg.** Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie mit zweien, unter gegebenem Winkel λ sich schneidenden Geraden Dreiecke bildet, die einen konstanten Flächeninhalt k^2 haben; man sucht die einhüllende Kurve dieser Geraden.

Lös. Nimmt man die beiden Schenkel des gegebenen Winkels zu Koordinatenaxen an und bezeichnet die Stücke, welche die bewegliche gerade Linie in einer ihrer Lagen von diesen Axen abschneidet, mit α und β, so ist die Gleichung dieser Linie



$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

oder, da die Fläche des abgeschnittenen Dreiecks $\frac{1}{2}\,\alpha\,\beta\,.\sin\lambda = k^2$ sein soll,

$$y\,.\,\alpha^2\,.\sin\lambda = 2\,k^2\,(\alpha - x).$$

Hieraus und aus den partiellen Differentialquotienten nach α, nämlich

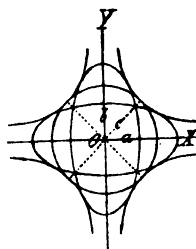
$$y \, . \, \alpha \, . \sin \lambda - k^2 = 0,$$

erhält man nach Elimination von α als Gleichung der einhüllenden Kurve

$$x y = \frac{k^2}{2 \, . \sin \lambda},$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, bei der die Koordinatenaxen, hier also die beiden gegebenen Geraden, Asymptoten sind.

90) Aufg. Man bestimme die Enveloppe aller konzentrischen Ellipsen von gleichem Flächeninhalt πc^2, deren Axenrichtungen zusammenfallen.



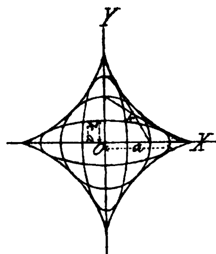
Lös. Die gesuchte Kurve hat die Gleichung

$$4 x^2 y^2 = c^4,$$

besteht also aus zwei gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Koordinatenaxen sind.

91) Aufg. Eine gerade Linie von gegebener Länge k bewegt sich so, dass ihre Endpunkte beständig in zwei auf einander senkrecht stehenden festen Geraden liegen; es wird die einhüllende Kurve dieser bewegten Linie gesucht.

Lös. Wenn man die festen Geraden zu Koordinatenaxen annimmt und die Stücke, welche von ihnen durch die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen abgeschnitten werden, mit α und β bezeichnet, so hat man



$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \beta^2 + \alpha^2 = k^2;$$

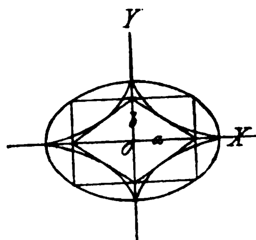
also

$$\frac{y}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} + \frac{x}{\alpha} = 1.$$

Eliminiert man hieraus und aus dem partiellen in Bezug auf α genommenen Differentialquotienten die Grösse α, so ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Kurve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}. \quad \text{(Asteroide.)}$$

Anmerkung. Diese Kurve kann auch erhalten werden als Enveloppe konzentrischer Ellipsen, welche die Axenrichtungen gemein haben und bei welchen die Summe der Halbaxen konstant $= k$ ist.



Auf ein ähnliches Resultat, nämlich auf die Kurve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ führt folgende Aufgabe: Von jedem Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ werden Lote auf die Axen gefällt und die Fusspunkte derselben durch Gerade verbunden; man bestimme die Enveloppe aller dieser Geraden.

Wird in dieser Aufgabe an Stelle der Ellipse ein Kreis gesetzt, d. h. ist $a = b = k$, so wird wieder obige Kurve erhalten.

92) **Aufg.** Der Mittelpunkt eines Kreises von gegebenem Radius r bewegt sich auf einer gegebenen Kurve $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$; man sucht die Kurve, welche alle diese Kreise einhüllt.

Lös. Die Gleichung des Kreises wird

$$(x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 - r^2 = 0,$$

und die Differentation in Bezug auf α ergibt

$$x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)] \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen α eliminiert, so erhält man die Gleichung der gesuchten einhüllenden Kurve.

Wäre z. B. als leitende Kurve ein Kreis unter der Form

$$\beta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$$

gegeben, so wäre die Gleichung der einhüllenden Kurve

$$x^2 + y^2 = (R \pm r)^2,$$

d. h. die Enveloppe wäre ein konzentrischer Kreis, dessen Radius die Summe oder Differenz der beiden gegebenen Radien ist.

Wäre als leitende Kurve die gerade Linie $\beta = a\alpha + b$ gegeben, so wäre die Gleichung der den beweglichen Kreis einhüllenden Kurve wieder die einer geraden Linie

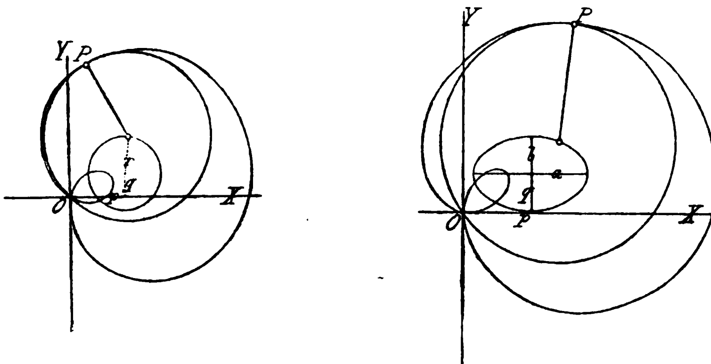
$$y = ax + b \pm r\sqrt{1 + a^2}.$$

Aus den allgemeinen Gleichungen ergibt sich beiläufig noch:

$$x - \alpha = \pm \frac{r \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}, \quad y - \beta = \pm \frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}},$$

und hieraus, wenn man beides nach α differentiiert, $\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{d\alpha}$, d. h. die einhüllende Kurve besitzt in jedem Punkte mit der eingehüllten eine gemeinsame Tangente. Die beiden einhüllenden Kurven sind Parallelkurven.

93) Aufg. Der Mittelpunkt eines Kreises von variablem Radius bewegt sich auf einer gegebenen Kurve, während die Peripherie desselben immer durch einen gegebenen festen Punkt geht. Es soll die einhüllende Kurve des bewegten Kreises gefunden werden.



Lös. Wenn der feste Punkt zum Anfangspunkt der Koordinaten genommen wird und die Koordinaten des Mittelpunktes des bewegten Kreises α und β sind, so wird die Gleichung dieses Kreises

$$x^2 + y^2 = 2\,\alpha\,x + 2\,\beta\,y.$$

Die Gleichung der leitenden Kurve sei $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$; dann wird der Differentialquotient der vorigen Gleichung in Bezug auf α

$$y \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + x = 0,$$

aus welchen beiden Gleichungen man durch Elimination von α die gesuchte Gleichung der einhüllenden Kurve erhält.

Wäre z. B. als leitende Kurve ein Kreis mit dem Radius r und den Mittelpunktskoordinaten p und q gegeben, wäre also $(\beta - q)^2 + (\alpha - p)^2 = r^2$, so würde die Gleichung der einhüllenden Kurve sein

$$(x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,q\,y)^2 = 4\,r^2\,(x^2 + y^2),$$

und wenn man den Mittelpunkt des leitenden Kreises in den Anfangspunkt der Koordinaten selbst verlegt, also $p = 0$ und $q = 0$ setzt, so ergibt sich als einhüllende Kurve

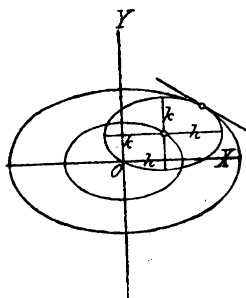
$$x^2 + y^2 = 4\,r^2,$$

d. h. ein dem ersten konzentrischer Kreis, dessen Radius das Doppelte vom früheren ist.

Nähme man als leitende Kurve eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b und den Mittelpunktskoordinaten p und q und denkt man sich die Koordinatenaxen parallel mit den Axen der Ellipse, so würde die Gleichung der den bewegten Kreis einhüllenden Kurve sein

$$(x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,q\,y)^2 = 4\,(a^2\,x^2 + b^2\,y^2).$$

Wenn hierbei der feste Punkt in einem Brennpunkt der Ellipse liegt, so ist die einhüllende Kurve ein Kreis, dessen Mittelpunkt im zweiten Brennpunkt liegt und dessen Radius $= 2\,a$, also gleich der grossen Axe der Ellipse ist.



94) Aufg. Der Mittelpunkt einer beweglichen Ellipse mit den Halbaxen h und k bewegt sich auf einer anderen Ellipse mit denselben Halbaxen, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist. Welches ist die Enveloppe der beweglichen Ellipse?

Lös. $\dfrac{x^2}{(2\,h)^2} + \dfrac{y^2}{(2\,k)^2} = 1.$

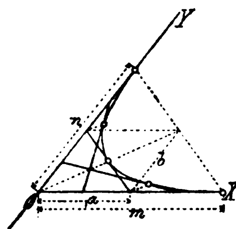
95) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wenn die variablen Parameter a und b mit den Konstanten m und n durch die Gleichung

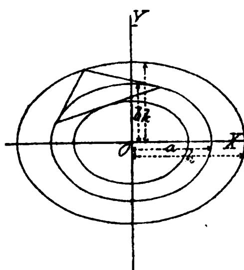
$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=1$$

verbunden sind.



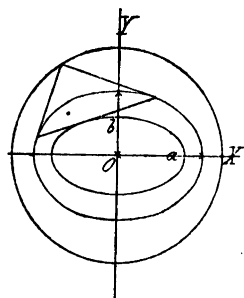
Lös. $\sqrt{\frac{x}{m}}+\sqrt{\frac{y}{n}}=1$. Die geometrische Interpretation dieses Problems ergibt eine bekannte Konstruktion der Parabel als Enveloppe ihrer Tangenten.

96) Aufg. Von jedem Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=1$ werden Tangentenpaare an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ gezogen. Es wird die Enveloppe der Berührungssehnen (Polaren derjenigen Punkte, von denen aus die Tangenten gezogen sind) verlangt.



Lös. $\frac{h^2 x^2}{a^4}+\frac{k^2 y^2}{b^4}=1$.

97) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Berührungssehnen aller derjenigen Tangentenpaare an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, welche auf einander senkrecht stehen.



Lös. Bedenkt man, dass der geometrische Ort derjenigen Punkte, von welchen aus sich Tangenten an die gegebene Ellipse ziehen lassen, die aufeinander senkrecht stehen, der Kreis $x^2+y^2=a^2+b^2$ ist, so erhält man durch die Substitution

$$h=k=\sqrt{a^2+b^2}$$

in die vorhergehende Aufgabe als Lösung die der gegebenen konfokale Ellipse

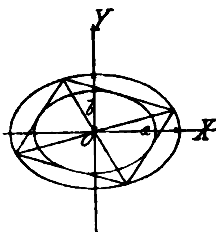
$$\frac{a^2+b^2}{a^4}x^2+\frac{a^2+b^2}{b^4}y^2=1.$$

98) **Aufg.** Es soll die Enveloppe der Sehnen gefunden werden, welche die Endpunkte konjugierter Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

mit einander verbinden.

Lös. Bezeichnet man mit ξ und η die Koordinaten eines Endpunktes des einen Durchmessers, so sind $\frac{a}{b}\eta$, $-\frac{b}{a}\xi$ diejenigen eines Endpunktes des konjugierten Durchmessers. Folglich wird die Gleichung der Verbindungssehne



$$\xi\left(y-\frac{b}{a}x\right)-\eta\left(x+\frac{a}{b}y\right)+ab=0.$$

Hierin bedeuten ξ und η zwei variable Parameter, die durch die Gleichung $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$ mit einander verbunden sind. Die Enveloppe aller dieser Geraden ist die Ellipse $\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$

99) **Aufg.** Welche Gleichung muss zwischen den variablen Parametern u und v bestehen, damit die Gerade $ux+vy=1$ in jeder ihrer Lagen Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sei?

Lös. Es muss $a^2u^2+b^2v^2=1$ sein. (Gleichung der Ellipse in Linienkoordinaten).

100) **Aufg.** Es ist die Evolute der Kurve

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

zu bestimmen. (Vergl. Aufg. 77.)

Lös. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Kurve können gegeben werden durch die Gleichungen

$$x'=a\cos^3\varphi,\quad y'=a\sin^3\varphi.$$

Demnach wird die Gleichung der Normale in diesem Punkte

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=a\cos 2\varphi$$

oder

$$\frac{x+y}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{x-y}{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=2a\sqrt{2}.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung φ als variablen Parameter, so ist die Enveloppe aller dieser Normalen die gesuchte Evolute. Man erhält die Gleichung

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}}.$$

Anmerkung. Es ist eine nützliche Übung, die Evolute einer gegebenen Kurve nicht nur als Ort der Krümmungsmittelpunkte derselben zu bestimmen, sondern auch dadurch, dass man sie als Enveloppe der Normalen dieser Kurve ansieht.

8. Fusspunktkurven.

101) Aufg. Man bestimme für den Koordinatenanfangspunkt als Pol die Fusspunktkurve der Kurve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1.$$

Lös. Die Fusspunktkurve hat die Gleichung

$$(a\,\xi)^{\frac{n}{n-1}} + (b\,\eta)^{\frac{n}{n-1}} = (\xi^2+\eta^2)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, $b = a\sqrt{-1}$, $n = 2$, ergibt sich die Lemniskate

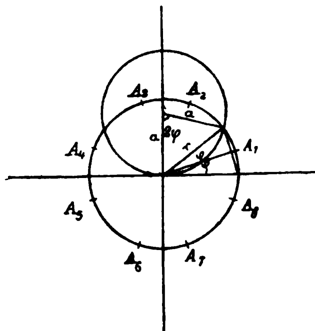
$$(\xi^2+\eta^2)^2 + a^2(\eta^2-\xi^2) = 0.$$

Für $a = b$ und $n = \frac{2}{3}$ (vergl. Aufg. 1) erhält man hieraus

$$(\xi^2+\eta^2)^3 = a^2\,\xi^2\,\eta^2,$$

in Polarkoordinaten: $r = 2\,a \sin 2\,\varphi$.

Zusatz. Man erhält dieselbe Kurve durch folgende Konstruktion: Man lege an einen festen Kreis mit dem Radius a eine feste Tangente und schlage um den Berührungspunkt Kreise mit verschiedenen Radien. Ein solcher Kreis schneidet sowohl den festen Kreis, wie die feste Tangente in 2 Punkten. Man halbiere nun den Bogen des variabeln Kreises, der durch einen Punkt der festen Tangente und einen Punkt des festen Kreises begrenzt wird. Man erhält jedesmal 8 Punkte. Vergl. Aufg. 27.



102) **Aufg.** Man zeige, dass die Fusspunktkurve der Kurve

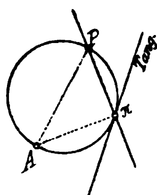
$$r = a \sec^3 \frac{\varphi}{3}$$

für den Pol des Koordinatensystems eine Parabel ist, deren Brennpunkt der Pol ist.

103) **Aufg.** Es soll bewiesen werden, dass die Fusspunktkurve der Kurve

$$r^n = a^n \cos n\varphi$$

für den Pol des Koordinatensystems wieder eine Kurve von derselben Art ist.



104) **Aufg.** Wenn dem Punkte P der gegebenen Kurve ein Punkt π der Fusspunktkurve entspricht, so soll gezeigt werden, dass die Tangente an die Fusspunktkurve im Punkte π ebenfalls Tangente an den Kreis ist, der über AP als Durchmesser beschrieben wird.

105) **Aufg.** Die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten ist $r = f(\varphi)$. Welches ist die Gleichung ihrer Fusspunktkurve, gleichfalls in Polarkoordinaten?

Lös. Nennt man Leitstrahl und Amplitude der Fusspunktkurve ϱ und ψ, so ist

$$\psi = \vartheta + \varphi - \frac{\pi}{2},$$

$$\varrho = r \cos(\varphi - \psi),$$

wobei

$$\vartheta = \text{arc tang} \frac{r}{r'}$$

ist. Eliminiert man aus beiden Gleichungen mit Benutzung der Relation $r = f(\varphi)$ r und φ, so erhält man

$$F(\psi, \varphi) = 0$$

als Gleichung der gesuchten Kurve.

9. Parallelkurven.

106) **Aufg.** Man beweise den Satz: Tangenten in entsprechenden Punkten einer gegebenen Kurve $F(x, y) = 0$ und ihrer Parallelkurve sind parallel.

Lös. Der Abstand zwischen beiden Kurven sei k. Dann ist

$$d\xi = dx \mp k \cos\alpha \, d\alpha = \cos\alpha \, (ds \mp k \, d\alpha),$$

$$d\eta = dy \mp k \sin\alpha \, d\alpha = \sin\alpha \, (ds \mp k \, d\alpha).$$

Die Parallelkurve kann also angesehen werden entweder als Enveloppe einer Geraden,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = \pm k \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2},$$

welche der Tangente an die gegebene Kurve parallel und in konstanter Entfernung $\pm k$ von derselben ist, oder als Enveloppe des Kreises vom Radius k

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = k^2,$$

dessen Mittelpunkt sich auf der gegebenen Kurve bewegt. (Vergl. Aufg. 92.)

107) **Aufg.** Bezeichnet man mit $d\sigma$ das Bogendifferential der Parallelkurve, so findet sich

$$d\sigma = (ds \mp k \, d\alpha).$$

Welcher Satz liegt hierin?

Lös. Ein endliches Bogenstück einer Parallelkurve hat die Länge des entsprechenden Bogenstückes der Grundkurve, vermindert oder vermehrt um denjenigen Teil der Peripherie eines Kreises vom Radius k, welcher die Differenz der Werte von α am Ende und Anfang des Kurvenbogens zum Zentriwinkel hat.

108) **Aufg.** Für das Flächenelement, welches begrenzt wird von der gegebenen und der Parallelkurve und von zwei Normalen, die den Winkel $d\alpha$ mit einander verschliessen, erhält man

$$k \, ds \mp \tfrac{1}{2} k^2 \, d\alpha.$$

Welche Eigenschaft der Parallelkurven drückt diese Formel aus?

109) **Aufg.** Den Krümmungsradius einer Parallelkurve zu berechnen.

Lös. Der Krümmungsradius ϱ' wird

$$\varrho' = \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} \mp k = \varrho \mp k.$$

110) **Aufg.** Es sei ein Kreis mit dem Radius r gegeben; man suche die Parallelkurve

Lös. Die Gleichung des Kreises sei

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Irgend ein Punkt x, y desselben ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{cotang}\varphi, \text{ also } \alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Demnach erhält man für die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Parallelkurve:

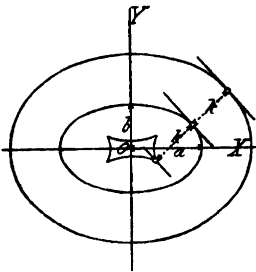
$$\xi = (r \mp k)\cos\varphi,$$
$$\eta = (r \mp k)\sin\varphi,$$

woraus sich als Gleichung der inneren oder äusseren Parallelkurve ergibt

$$\xi^2 + \eta^2 = (r \mp k)^2.$$

Es sind somit die Parallelkurven Kreise, welche mit dem gegebenen konzentrisch sind.

111) **Aufg.** Es sei eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b gegeben; man sucht die beiden Parallelkurven.



Lös. Wenn die Ellipse dargestellt ist durch die beiden Gleichungen

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi,$$

so findet man für die Koordinaten der dem Punkte x, y entsprechenden Punkte der Parallelkurven

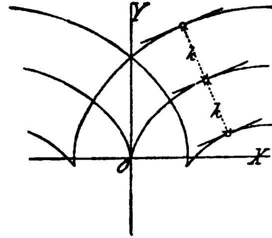
$$\xi = x \pm \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \left[a \pm \frac{bk}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right].\cos\varphi,$$

$$\eta = y \mp \frac{k\,.\,\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \left[b \pm \frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right].\sin\varphi.$$

Wenn man hieraus den Winkel φ eliminiert, erhält man die Gleichungen der Parallelkurven.

112) Aufg. Wenn man für die gewöhnliche Zykloide die Parallelkurven sucht, so ist für einen beliebigen Punkt der Zykloide

$$x = r \, . \, (\varphi - \sin \varphi),$$
$$y = r \, . \, (1 - \cos \varphi).$$



Die Koordinaten der entsprechenden Punkte der Parallelkurven sind dann bestimmt durch

$$\xi = r \, . \, \varphi - (2 r \sin \tfrac{1}{2} \varphi \mp k) \, . \cos \tfrac{1}{2} \varphi,$$
$$\eta = (2 r \sin \tfrac{1}{2} \varphi \mp k) \, . \sin \tfrac{1}{2} \varphi.$$

Kapitel IX.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Raumkurven.

§ 24. Lehrsätze.

Eine doppelt gekrümmte Kurve oder eine Raumkurve kann dadurch gegeben werden, dass man die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes derselben als Funktionen einer vierten Veränderlichen t darstellt:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Kann aus diesen drei Gleichungen die Grösse t eliminiert werden, so erhält man zwei Gleichungen

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

welche, zusammengenommen, die Kurve als Durchschnitt zweier Flächen erscheinen lassen.

Bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche die Tangente an die Kurve im Punkte x, y, z mit den Koordinatenaxen einschliesst, so findet sich

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wo

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

das Bogendifferential der Kurve bedeutet.

Es sind demnach die Gleichungen der Tangente im Punkte x, y, z

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}},$$

und die Gleichung der Normalebene in diesem Punkte wird

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) + \frac{dz}{dt}(\zeta - z) = 0.$$

Diejenige Ebene, welche zwei benachbarte Kurvenelemente oder ausser dem Punkte x, y, z noch die zwei benachbarten Kurvenpunkte enthält, heisst die Oskulations- oder Schmiegungsebene oder auch die Krümmungsebene der Kurve im Punkte x, y, z. Ihre Gleichung lautet:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

wo

$$A = dy\, d^2 z - dz\, d^2 y,$$
$$B = dz\, d^2 x - dx\, d^2 z,$$
$$C = dx\, d^2 y - dy\, d^2 x.$$

Die Normale dieser Ebene im Punkte x, y, z heisst die Binormale der Kurve, weil sie auf zwei benachbarten Kurvenelementen zugleich senkrecht steht. Sind $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Winkel, welche dieselbe mit den Koordinatenaxen einschliesst, so ist

$$\cos\alpha_2 = \frac{A}{D}, \quad \cos\beta_2 = \frac{B}{D}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{C}{D},$$

wo

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2} =$$
$$= ds^2 \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Wird der Winkel zweier benachbarten Tangenten oder der Kontingenzwinkel mit $d\tau$ bezeichnet, so findet sich

$$d\tau = \frac{D}{ds^2} = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Das Verhältnis des Kontingenzwinkels $d\tau$ zum Bogendifferential ds heisst die erste Krümmung der Kurve oder die Krümmung in der Oskulationsebene. Bezeichnet man den Radius der ersten Krümmung mit ϱ, so hat man die Beziehungen

$$\varrho\, d\tau = ds,$$

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Unter der Hauptnormale der Kurve im Punkte x, y, z versteht man diejenige Normale, welche in der Oskulationsebene liegt. Werden die Winkel, welche sie mit den Koordinatenaxen bildet, mit α_1, β_1, γ_1 bezeichnet, so findet sich

$$\cos\alpha_1 = \frac{d\cos\alpha}{d\tau} = \varrho\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{d\cos\beta}{d\tau} = \varrho\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{d\cos\gamma}{d\tau} = \varrho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

In der Hauptnormale liegt der Krümmungsmittelpunkt, dessen Koordinaten sind:

$$X = x + \varrho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad Y = y + \varrho^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad Z = z + \varrho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Man nennt den Winkel, den zwei benachbarte Oskulationsebenen mit einander bilden, den Schmiegungs-, Torsions- oder Windungswinkel. Wird derselbe mit $d\vartheta$ bezeichnet, so ist

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\alpha_2)^2 + (d\cos\beta_2)^2 + (d\cos\gamma_2)^2}.$$

Wenn für alle Werte von x, y, z die Grösse $d\vartheta = 0$ oder der Zähler von $d\vartheta$, d. i. die Determinante

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist die Kurve eine ebene Kurve.

Zwischen den Winkeln α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 bestehen folgende, von Frenet herrührende Formeln:

$$\cos\alpha_1 = \frac{d\cos\alpha}{d\tau} = -\frac{d\cos\alpha_2}{d\vartheta},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{d\cos\beta}{d\tau} = -\frac{d\cos\beta_2}{d\vartheta},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{d\cos\gamma}{d\tau} = -\frac{d\cos\gamma_2}{d\vartheta}.$$

Das Verhältnis des Schmiegungswinkes zum Bogendifferential heisst die zweite Krümmung oder die Torsion (Windung) der Kurve, und der reziproke Wert r der zweiten Krümmung

$$r = \frac{ds}{d\vartheta}$$

wird der **Radius der zweiten Krümmung** genannt.

Zuweilen wird die Grösse

$$dk = \sqrt{d\tau^2 + d\vartheta^2}$$

als **Winkel der ganzen Krümmung** der Kurve bezeichnet. Es ist dies der Winkel, den zwei benachbarte Hauptnormalen mit einander einschliessen. Nach Analogie der ersten und zweiten Krümmung einer doppelt gekrümmten Kurve wird das Verhältnis

$$\frac{dk}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{R^*}$$

die **ganze Krümmung** und die Grösse R^* der **Radius der ganzen Krümmung** der Kurve genannt. (Schell.)

Die Ebene, welche im Punkte x, y, z senkrecht steht auf der Hauptnormale, heisst **rektifizierende Ebene**. Ihre Gleichung ist

$$\cos \alpha_1 (\xi - x) + \cos \beta_1 (\eta - y) + \cos \gamma_1 (\zeta - z) = 0.$$

Die Schnittlinie zweier benachbarten rektifizierenden Ebenen heisst **rektifizierende Kante**. Bezeichnet man die Winkel, welche die rektifizierende Kante mit den Koordinatenaxen einschliesst, mit a^*, b^*, c^*, so ist

$$\cos a^* = \frac{d\vartheta}{dk} \cos \alpha + \frac{d\tau}{dk} \cos \alpha_2 = \frac{R^*}{r} \cos \alpha + \frac{R^*}{\varrho} \cos \alpha_2,$$

$$\cos b^* = \frac{d\vartheta}{dk} \cos \beta + \frac{d\tau}{dk} \cos \beta_2 = \frac{R^*}{r} \cos \beta + \frac{R^*}{\varrho} \cos \beta_2,$$

$$\cos c^* = \frac{d\vartheta}{dk} \cos \gamma + \frac{d\tau}{dk} \cos \gamma_2 = \frac{R^*}{r} \cos \gamma + \frac{R^*}{\varrho} \cos \gamma_2.$$

Diejenige Kugelfläche, welche in einem bestimmten Punkte der Raumkurve vier unendlich benachbarte Punkte mit der Raumkurve gemeinsam hat, heisst **Schmiegungs- oder Oskulationskugel** der Raumkurve in diesem Punkte. Ihr Mittelpunkt, welcher der Schnittpunkt dreier benachbarter Normalebenen ist, hat von der Oskulationsebene den Abstand

$$h = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = r \frac{d\varrho}{ds}.$$

Der Radius R der Schmiegungskugel ergibt sich aus der Gleichung

$$R^2 = \varrho^2 + r^2 \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Ihr Mittelpunkt hat die Koordinaten:

$$X = x + \varrho\,\alpha_1 + r\frac{d\varrho}{ds}\alpha_2,$$

$$Y = y + \varrho\,\beta_1 + r\frac{d\varrho}{ds}\beta_2,$$

$$Z = z + \varrho\,\gamma_1 + r\frac{d\varrho}{ds}\gamma_2.$$

Die Schraubenlinie, welche im Punkte x, y, z mit der Raumkurve alle hier berechneten Grössen, mit Ausnahme der Schmiegungskugel, gemein hat, wird die oskulierende Schraubenlinie (Helix) der Kurve genannt. Die Axe des Rotationszylinders, auf welcher dieselbe liegt, ist der rektifizierenden Kante parallel. Werden die Koordinaten eines Punktes dieser Schraubenlinie gegeben durch die Gleichungen

$$x = m\cos\varphi, \quad y = m\sin\varphi, \quad z = n\varphi,$$

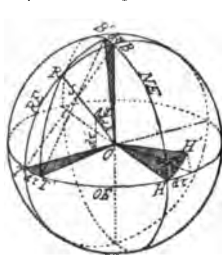
so sind die Konstanten m und n zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\varrho = \frac{m^2+n^2}{m}, \quad r = \frac{m^2+n^2}{n},$$

wo ϱ und r die Radien der ersten und zweiten Krümmung der vorliegenden Raumkurve im Punkte x, y, z sind.

§ 25. Beispiele.

1) Aufg. Man beweise den Satz: Wenn die beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ einer Raumkurve ein konstantes Verhältnis haben, so sind die Hauptnormalen dieser Kurve einer festen Ebene und die rektifizierenden Kanten einer festen Geraden parallel. Mit anderen Worten: Die rektifizierende Developpable ist ein Zylinder und die Raumkurve eine Schraubenlinie. (Bertrand.)



Anleitung. Der Beweis kann gegeben werden mit Hülfe des Satzes: Die rektifizierende Kante teilt den Winkel zwischen Tangente und Binormale in der Weise, dass die Sinus der Teile sich verhalten wie $d\tau : d\vartheta$, wie leicht aus den allgemeinen Gleichungen für $\cos a^*$ u. s. w. zu rektifizieren ist. Trägt man daher auf die Tangente vom Kurvenpunkte aus die Strecke $\frac{1}{r}$, auf die Binormale die Strecke $\frac{1}{\varrho}$ ab und denkt sich die Figur zu einem Parallelogramm vervollständigt, so besitzt die Diagonale desselben die Richtung der rektifizierenden Kante und die Länge der ganzen Krümmung. Wenn nun $\frac{r}{\varrho}$ konstant ist, so ist auch $\frac{r}{R^*}$ konstant und daher sind auch die Winkel des Dreiecks, dessen Seiten $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{R^*}$ sind, konstant. Die Raumkurve schneidet somit sämtliche Erzeugende der rektifizierenden Developpablen unter konstantem Winkel; sie ist also eine isogonale Trajektorie dieser Erzeugenden. Zeigt man noch (durch Differentiation), dass die Grössen $\cos a^*$, $\cos b^*$, $\cos c^*$ unabhängig von der Lage des Kurvenpunktes sind, so ergeben sich leicht die in obigem Satze ausgesprochenen Eigenschaften der Raumkurve.

Zusatz. Wenn die beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ einer Raumkurve konstant sind, so ist die Kurve eine Schraubenlinie, die auf einem Kreiszylinder liegt.

2) Aufg. Es soll die zylindrische Schraubenlinie untersucht werden.

Lös. Die rechtwinkligen Koordinaten irgend eines Punktes der zylindrischen Schraubenlinie können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = m \cos\varphi, \quad y = m \sin\varphi, \quad z = n\varphi.$$

Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = m^2,$$

d. h. die Kurve liegt auf einem geraden Kreiszylinder vom Radius m. Die Projektion der Kurve auf die XZ-Ebene ist die Kurve

$x = m \cos \frac{z}{n}$, diejenige auf die YZ-Ebene die Kurve $y = m \sin \frac{z}{n}$.
Die Rechnung ergibt

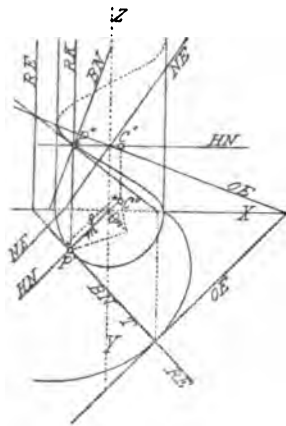
$$d s = \sqrt{m^2 + n^2} \, . \, d \varphi ;$$

$$\cos \alpha = \frac{-m \sin \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m \cos \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

$$\cos \alpha_1 = -\cos \varphi, \quad \cos \beta_1 = -\sin \varphi, \quad \cos \gamma_1 = 0;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{n \sin \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta_2 = -\frac{n \cos \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Da $\cos \gamma$, $\cos \gamma_1$, $\cos \gamma_2$ konstant sind, so ist die Kurve eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden des Zylinders, auf welchem sie liegt; die Binormalen bilden mit der Z-Axe und folglich die Oskulationsebenen mit der XY-Ebene einen konstanten Winkel. Die Hauptnormalen schneiden die Z-Axe und da $\cos \gamma_1 = 0$ ist, so sind sie der XY-Ebene parallel, woraus folgt, dass die rektifizierenden Ebenen der Z-Axe parallel sind. Die rektifizierende Developpable ist identisch mit dem Zylinder $x^2 + y^2 = m^2$. Wird dieser Zylinder in eine Ebene ausgebreitet, so erscheint die Schraubenlinie in der Abwickelung als Gerade.



Es wird ferner

$$d \tau = \frac{m \, d \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad d \vartheta = \frac{n \, d \varphi}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad d k = d \varphi,$$

$$\varrho = \frac{m^2 + n^2}{m}, \quad r = \frac{m^2 + n^2}{n}, \quad R^* = \sqrt{m^2 + n^2};$$

$$h = \frac{d \varrho}{d \vartheta} = 0, \quad R = \varrho.$$

Es sind somit sämtliche Krümmungen, sowie auch der Radius der oskulierenden Kugel der Schraubenlinie konstant. Dass die rektifizierenden Kanten der Z-Axe parallel sind, wird bestätigt durch die Formeln

$$\cos a^* = 0, \quad \cos b^* = 0, \quad \cos c^* = 1.$$

Es ist die Gleichung der Normalebene:

$$-m \sin \varphi (\xi - x) + m \cos \varphi (\eta - y) + n (\zeta - z) = 0,$$

der Oskulationsebene:

$$n \sin \varphi (\xi - x) - n \cos \varphi (\eta - y) + m (\zeta - z) = 0,$$

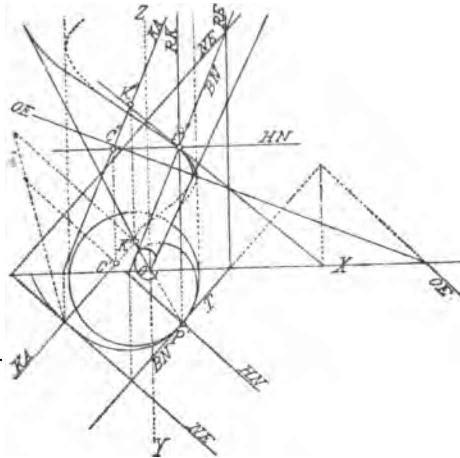
der rektifizierenden Ebene:

$$\cos \varphi (\xi - x) + \sin \varphi (\eta - y) = 0.$$

3) **Aufg.** Untersuchung der konischen Spirale.

Lös. Jeder Punkt dieser Kurve ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = t \cos (m l t), \quad y = t \sin (m l t), \quad z = n t,$$



in welchen t die unabhängige Veränderliche bedeutet. Aus denselben folgt

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{n^2} = 0;$$

daher liegt die Kurve auf einem Rotationskegel, dessen Spitze der Koordinatenanfangspunkt und dessen Axe die Z-Axe ist. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = t^2$$

lässt erkennen, dass jeder bestimmte Wert der unabhängigen Veränderlichen t den Abstand des zugehörigen Kurvenpunktes von der Z-Axe angibt. Setzt man der Kürze wegen $m l t = \varphi$, so folgt

$t = e^{\frac{\varphi}{m}}$, und es ist somit die Horizontalprojektion der zu untersuchenden Raumkurve eine logarithmische Spirale. Man findet

$$dx = (\cos\varphi - m\sin\varphi)\,dt,\quad d^2x = -\frac{m}{t}\,dy\,dt,\quad d^3x = \frac{m}{t^2}(1+m^2)\sin\varphi\,dt^3;$$

$$dy = (\sin\varphi + m\cos\varphi)\,dt,\quad d^2y = \frac{m}{t}\,dx\,dt;\quad d^3y = -\frac{m}{t^2}(1+m^2)\cos\varphi\,dt^3;$$

$$dz = n\,dt,\qquad d^2z = 0,\qquad d^3z = 0;$$

$$ds = \sqrt{1+m^2+n^2}\,dt;$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi - m\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\sin\varphi + m\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

Da $\cos\gamma$ konstant ist, so ist der Winkel, den die Tangente mit der Z-Axe bildet, konstant.

Denkt man sich also durch einen beliebigen Punkt des Raumes Parallelen zu allen Tangenten der Kurve gezogen, so bildet die Gesamtheit derselben einen geraden Kreiskegel, dessen Axe die durch denselben Punkt gezogene Parallele zur Z-Axe ist.

Bezeichnet man mit ω den Winkel, den die Tangente im Punkte x, y, z mit der Erzeugenden des Kegels

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{n^2} = 0,$$

welche durch diesen Punkt geht, bildet, so ist

$$\cos\omega = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{1+n^2}{1+m^2+n^2}}.$$

Dieser Winkel ist von t unabhängig, folglich ist die Kurve eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden des Kegels. Es ist ferner

$$A = -\frac{mn}{t}\,dx\,dt^2,$$

$$B = -\frac{mn}{t}\,dy\,dt^2,$$

$$C = \frac{m}{t}(1 + m^2)\, d\, t^3,$$

$$D = \frac{m}{t}\sqrt{(1 + m^2)(1 + m^2 + n^2)} \,.\, d\, t^3.$$

Daher wird

$$\cos \alpha_2 = -\frac{n(\cos\varphi - m\sin\varphi)}{\sqrt{(1 + m^2)(1 + m^2 + n^2)}},$$

$$\cos \beta_2 = -\frac{n(\sin\varphi + m\cos\varphi)}{\sqrt{(1 + m^2)(1 + m^2 + n^2)}},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{1 + m^2}{\sqrt{(1 + m^2)(1 + m^2 + n^2)}} = \sqrt{\frac{1 + m^2}{1 + m^2 + n^2}}.$$

Die Binormale und folglich auch die Oskulationsebene bildet also ebenfalls mit der Z-Axe einen konstanten Winkel.

$$\cos \alpha_1 = -\frac{\sin\varphi + m\cos\varphi}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos\varphi - m\sin\varphi}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$\cos \gamma_1 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Hauptnormalen sämtlich der XY-Ebene parallel sind. Sie schneiden jedoch die Z-Axe nicht. Die rektifizierenden Ebenen sind der Z-Axe parallel und umhüllen somit einen Zylinder. Der Schnitt desselben mit der XY-Ebene ist die oben erwähnte logarithmische Spirale.

$$d\tau = \frac{m}{t}\sqrt{\frac{1 + m^2}{1 + m^2 + n^2}}\, d\, t,$$

$$d\vartheta = \frac{m\, n}{t} \cdot \frac{d\, t}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

$$d\, k = \frac{m}{t}\, d\, t = d\, \varphi;$$

$$\varrho = \frac{1 + m^2 + n^2}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \frac{t}{m}, \quad r = \frac{1 + m^2 + n^2}{m\, n} \,.\, t,$$

$$R^* = \frac{t}{m}\sqrt{1 + m^2 + n^2}.$$

Da das Verhältnis

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{n}{\sqrt{1+m^2}}$$

konstant ist, so ist die Raumkurve nach dem Bertrand'schen Satze eine Schraubenlinie. Für den Radius R der Schmiegungskugel und für den Abstand h ihres Mittelpunktes von der Oskulationsebene findet man

$$R = \frac{t\,(1+m^2+n^2)\sqrt{1+n^2}}{m^2 n},$$

$$h = \frac{t\,(\sqrt{1+m^2+n^2})^3}{m^2 n \sqrt{1+m^2}}.$$

Die Gerade, welche den Kurvenpunkt mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Schmiegungskugel verbindet, schneidet beständig die Z-Axe. Der Radius ϱ^* des Zylinders, auf welchem die Schmiegungsschraubenlinie liegt, ist

$$\varrho^* = \frac{t\sqrt{1+m^2}}{m},$$

also gleich dem Krümmungsradius der logarithmischen Spirale im Punkte t, φ. Die Gleichungen

$$\cos a^* = 0, \quad \cos b^* = 0, \quad \cos c^* = 1$$

geben das Resultat, dass die rektifizierenden Kanten der Z-Axe parallel sind. Endlich wird noch die Gleichung der Normalebene

$$(\cos\varphi - m\sin\varphi)(\xi - x) + (\sin\varphi + m\cos\varphi)(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0,$$

die Gleichung der Oskulationsebene

$$n(\cos\varphi - m\sin\varphi)(\xi - x) + n(\sin\varphi + m\cos\varphi)(\eta - y) - (1+m^2)(\zeta - z) = 0,$$

die Gleichung der rektifizierenden Ebene

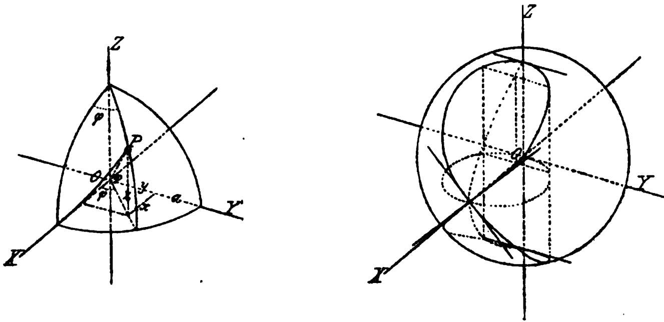
$$(\sin\varphi + m\cos\varphi)(\xi - x) - (\cos\varphi - m\sin\varphi)(\eta - y) = 0.$$

4) Aufg. Ein grösster Kreis einer Kugel dreht sich um einen seiner Durchmesser mit gleichförmiger Geschwindigkeit, während gleichzeitig ein Punkt seine Peripherie durchläuft. Man untersuche die Kurve, welche der Punkt beschreibt unter der Voraussetzung, dass seine (gleichförmige) Geschwindigkeit gleich derjenigen des Kreises sei.

Lös. Wählt man den festen Durchmesser von der Länge $2a$ zur Z-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen X- und Y-Axe durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und bezeichnet man mit φ den Winkel, den der bewegliche Kreis in irgend einer seiner Lagen mit der XZ-Ebene bildet, so erhält man für die Koordinaten eines beliebigen Punktes der zu untersuchenden Kurve

$$x = a\cos^2\varphi, \quad y = a\sin\varphi\cos\varphi, \quad z = a\sin\varphi,$$

wo a den Radius der Kugel bedeutet.



Die Kurve liegt sowohl auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, als auch auf dem Kreiszylinder $x^2 + y^2 - ax = 0$ und auf dem parabolischen Zylinder $z^2 = a(a - x)$. Verlegt man das Koordinatensystem in den Punkt $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ und setzt zu diesem Zwecke $x = x' + a$, so erkennt man ohne Schwierigkeit, dass die Kurve ebenfalls auf dem Rotationskegel $x'^2 + y^2 - z^2 = 0$ liegt. Sie kann demnach als Durchschnittskurve je zweier dieser vier Flächen konstruiert werden. Da x keine negativen Werte haben kann, so liegt sie ganz auf einer Halbkugel. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die XY- und XZ-Ebene und besitzt im Punkte $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt. Es findet sich

$$ds = a\sqrt{1 + \cos^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}, \quad \cos\beta = \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}};$$

$$\cos\alpha_1 = -2\,\frac{-1+2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\beta_1 = -\frac{5+2\cos^2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}\,.\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\cos\gamma_1 = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5+3\cos^2\varphi}};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\sin\varphi\,(2\cos^2\varphi+1)}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\beta_2 = -\frac{2\cos^3\varphi}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}.$$

Ferner wird die Gleichung der Normalebene

$$-\sin 2\varphi\,(\xi-x)+\cos 2\varphi\,(\eta-y)+\cos\varphi\,(\zeta-z)=0,$$

die Gleichung der Oskulationsebene

$$\sin\varphi\,(2\cos^2\varphi+1)\,(\xi-x)-2\cos^3\varphi\,(\eta-y)+2\,(\zeta-z)=0,$$

die Gleichung der rektifizierenden Ebene

$$2\,(-1+2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)\,(\xi-x)+(5+2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,(\eta-y)+$$
$$+\sin\varphi\,(\zeta-z)=0;$$

$$d\tau = \frac{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$d\vartheta = \frac{6\cos\varphi\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{5+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Demnach ist

$$\varrho = \frac{a\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+3\cos^2\varphi}},$$

$$r = \frac{a}{6}\cdot\frac{5+3\cos^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

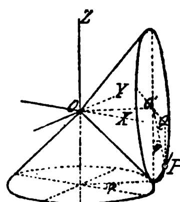
Für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ und $\varphi=\frac{3}{2}\pi$ wird $d\vartheta=0$; folglich besitzt die Kurve in den Punkten $x=0$, $y=0$, $z=\pm a$ die Torsion 0, also den Charakter einer ebenen Kurve. Im Doppelpunkte ($\varphi=0$ und $\varphi=\pi$) stimmt der Radius der ersten Krümmung mit dem Kugelradius überein.

Der Abstand des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel von der Oskulationsebene ist

$$h = -a \frac{2 + \cos^2 \varphi}{\sqrt{5 + 3 \cos^2 \varphi}} \cdot \sin \varphi.$$

Selbstverständlich fällt die oskulierende Kugel in jedem Punkte der Raumkurve mit der Kugel zusammen, auf welcher die Raumkurve liegt, d. h. es ist $R = a$, $X = Y = Z = 0$.

5) Aufg. Ein gerader Kreiskegel, dessen Höhe gleich dem Radius der Grundfläche, gleich 1 ist, rolle längs eines anderen eben solchen Kegels und zwar so, dass sich die beiden Kegel beständig längs einer Erzeugenden berühren und ihre Spitzen zusammenfallen. Ein Punkt in der Peripherie der Basis des beweglichen Kegels beschreibt dann eine Raumkurve, die man sphärische Epizykloide nennt. Es soll diese Kurve untersucht werden.



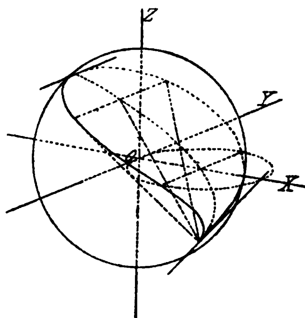
Lös. Bezeichnet man den Wälzungswinkel mit φ und wählt die beiden Kegeln gemeinsame Spitze zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so wird ein beliebiger Punkt der Kurve gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi + \sin^2 \varphi, \\ y &= \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi, \\ z &= -\cos \varphi. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die weiteren

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2, \\ z^2 + z + x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen hervorgeht, dass die zu betrachtende Kurve sowohl auf der Kugel vom Radius $\sqrt{2}$, als auch auf einem parabolischen Zylinder liegt, dessen Erzeugende der Y-Axe parallel sind. Im Punkte $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ besitzt die Kurve eine Spitze. Wird der Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems in diesen Punkt verlegt mittelst der Formeln



$$x = x' + 1, \quad y = y', \quad z = z' - 1,$$

so erhält man leicht die Gleichung $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$. Es liegt somit die Kurve auch auf einem Rotationskegel, dessen Spitze sich im neuen Koordinatenanfangspunkt befindet. Nun ergibt sich der Reihe nach

$$d\,s = \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{2\,(3+\cos\varphi)}\,d\,\varphi;$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2\,(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos\beta = \frac{2\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2\,(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2\,(3+\cos\varphi)}};$$

$$\cos\alpha_1 = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\,(5+10\cos\varphi+2\cos^2\varphi)}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)\,(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{2\,(-2+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)\,(3+\cos\varphi)}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(7+2\cos\varphi)\,(3+\cos\varphi)}};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1-2\cos\varphi-2\cos^2\varphi}{\sqrt{14+4\cos\varphi}},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{-2\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)}{\sqrt{14+4\cos\varphi}},$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{3}{\sqrt{14+4\cos\varphi}}.$$

$$d\,\tau = \frac{\sqrt{14+4\cos\varphi}}{3+\cos\varphi}\,d\,\varphi, \qquad d\,\vartheta = \frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi\,\sqrt{\frac{1}{2}\,(3+\cos\varphi)}}{7+2\cos\varphi}\,d\,\varphi.$$

Da $d\,\vartheta = 0$ wird für $\varphi = \pi$, so besitzt die Kurve im Punkte $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ die Torsion 0.

Für die Radien der ersten und zweiten Krümmung ergibt sich

$$\varrho = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\,(3+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{7+2\cos\varphi}},$$

$$r = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\,(7+2\cos\varphi)}{3\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Der Abstand h des Mittelpunktes der Schmiegungskugel von der Oskulationsebene ist

$$h = \frac{1 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi}{\sqrt{14 + 4\cos\varphi}},$$

und der Radius dieser Kugel wird, da die Kurve eine sphärische ist, für alle Punkte derselben konstant und gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Kurve liegt, also $R = \sqrt{2}$.

Endlich ist noch die Gleichung der Normalebene

$$\cos\tfrac{3}{2}\varphi\,(\xi - x) + \sin\tfrac{3}{2}\varphi\,(\eta - y) + \cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(\zeta - z) = 0,$$

die Gleichung der Oskulationsebene

$$(1 - 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi)(\xi - x) - 2\sin\varphi(1 + \cos\varphi)(\eta - y) + 3(\zeta - z) = 0,$$

die Gleichung der rektifizierenden Ebene

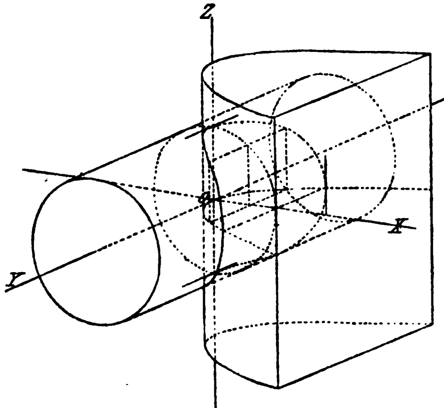
$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(5 + 10\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)(\xi - x) - 2\,(-2 + 4\cos\varphi +$$
$$+ \cos^2\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(\eta - y) + \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(\zeta - z) = 0.$$

6) **Aufg.** Es soll die Kurve untersucht werden, die entsteht aus dem Schnitt des parabolischen Zylinders

$$y^2 = 2px$$

mit dem Kreiszylinder

$$z^2 + x^2 = a^2.$$



Lös. Aus der Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgen die weiteren

$$(x - p)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + p^2,$$
$$(x + p)^2 + z^2 - y^2 = a^2 + p^2,$$

und es liegt daher diese Raumkurve sowohl auf einer Kugeloberfläche, als auch auf der Fläche eines einschaligen Rotationshyperboloids.

Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2xy}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{a^2}{z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = \frac{p}{y} \cdot (\xi - x), \qquad \zeta - z = -\frac{x}{z} \cdot (\xi - x);$$

oder

$$\eta = \frac{p}{y} \cdot \xi + \tfrac{1}{2} y, \qquad \zeta = -\frac{x}{z} \cdot \xi + \frac{a^2}{z}.$$

Die Gleichung der Normalebene

$$-\frac{x}{z}(\zeta - z) + \frac{p}{y}(\eta - y) + (\xi - x) = 0,$$

oder

$$\xi + \frac{p}{y} \cdot \eta - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0.$$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur YZ-Ebene wird $\frac{x}{yz} \cdot \sqrt{a^2 y^2 + p^2 z^2}$,

bis zur XZ-Ebene wird $\frac{y}{pz} \sqrt{a^2 y^2 + p^2 z^2}$,

bis zur XY-Ebene wird $\frac{z}{xy} \sqrt{a^2 y^2 + p^2 z^2}$.

Die Gleichungen der Schnittgeraden der Normalebene mit den Koordinatenebenen werden

mit der YZ-Ebene: $\frac{p}{y} \cdot \eta - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0$,

mit der XZ-Ebene: $\xi - \frac{x}{z} \cdot \zeta - p = 0$,

mit der XY-Ebene: $\xi + \frac{p}{y} \cdot \eta - p = 0$.

Die Gleichung der Schmiegungsebene wird

$$p^2 z^3 . \zeta - a^2 y^3 . \eta + p^2 x . (3 a^2 - x^2) . \xi - p^2 a^2 . (a^2 - 3 x^2) = 0.$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung wird

$$\varrho = \frac{(a^2 y^2 + p^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{p a . \sqrt{a^2 y^2 (4 x^2 + y^2) + p^2 z^2 (4 x^2 + z^2)}}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X = \frac{p . [a^2 y^2 (z^4 + 2 a^2 x^2) + \frac{1}{2} z^4 (a^2 y^2 + 2 p^2 z^2)]}{a^2 . [a^2 y^2 (4 x^2 + y^2) + p^2 z^2 (4 x^2 + z^2)]},$$

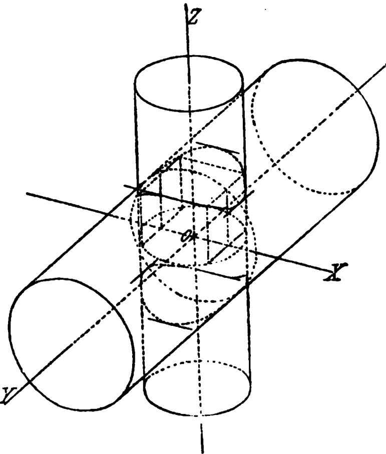
$$Y = \frac{y . [a^2 y^2 (2 x^2 + y^2) + z^2 (2 p^2 x^2 - a^2 y^2)]}{a^2 y^2 (4 x^2 + y^2) + p^2 z^2 (4 x^2 + z^2)},$$

$$Z = \frac{p^2 z^3 [a^2 (z^2 - 2 p x) - x (p z^2 + 2 a^2 x)]}{a^2 [a^2 y^2 (4 x^2 + y^2) + p^2 z^2 (4 x^2 + z^2)]}.$$

7) Aufg. Man untersuche die Kurve, welche durch den Schnitt zweier Kreiszylinder entsteht, die respektive auf der XY- und auf der XZ-Ebene senkrecht stehen.

Die Kurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$x^2 + z^2 = b^2.$$



Aus denselben folgt durch Addition und Subtraktion

$$2 x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2,$$
$$y^2 - z^2 = a^2 - b^2.$$

Es kann somit die Kurve auch angesehen werden als der Schnitt eines Rotationsellipsoids mit einem hyperbolischen Zylinder. Für $a = b$ zerfällt der letztere in zwei Ebenen, und die Kurve besteht in diesem Falle aus zwei Kegelschnitten.

Ferner wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}, \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{b^2}{z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x),$$

$$\zeta - z = -\frac{x}{z}(\xi - x);$$

oder

$$\eta y + \xi x = a^2,$$
$$\zeta z + \xi x = b^2.$$

Die Gleichung der Normalebene

$$\frac{\xi - x}{x} - \frac{\eta - y}{y} - \frac{\zeta - z}{z} = 0,$$

oder

$$\frac{\xi}{x} - \frac{\eta}{y} - \frac{\zeta}{z} + 1 = 0.$$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur YZ-Ebene wird $= x^2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$,

bis zur XZ-Ebene wird $= y^2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$,

bis zur XY-Ebene wird $= z^2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$.

Die Gleichungen der Schnittgeraden der Normalebene mit den Koordinatenebenen werden

mit der YZ-Ebene: $\frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} - 1 = 0$,

mit der XZ-Ebene: $\frac{\xi}{x} - \frac{\zeta}{z} + 1 = 0$,

mit der XY-Ebene: $\frac{\xi}{x} - \frac{\eta}{y} + 1 = 0$,

Die Gleichung der Schmiegungsebene wird

$$x(b^2 y^2 - a^2 z^2) \,.\, \xi + b^2 y^3 \,.\, \eta - a^2 z^3 \,.\, \zeta - a^2 b^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = 0.$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung wird

$$\varrho = \frac{(y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^4 b^2 z^4 + a^2 b^4 y^4 - 2 a^2 b^2 x^2 y^2 z^2}}.$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

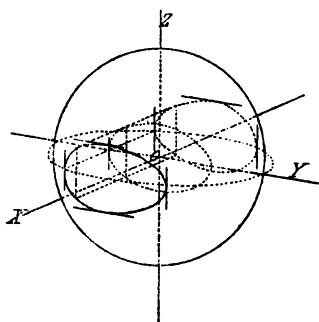
$$X = x^3 \cdot \frac{(a^2 z^2 - b^2 y^2)^2 - y^2 z^2 (a^2 z^2 + b^2 y^2)}{a^4 b^2 z^4 + a^2 b^4 y^4 - 2 a^2 b^2 x^2 y^2 z^2},$$

$$Y = b^2 y^3 \cdot \frac{x^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 - 2 a^2 x^2 z^2}{a^4 b^2 z^4 + a^2 b^4 y^4 - 2 a^2 b^2 x^2 y^2 z^2},$$

$$Z = a^2 z^3 \cdot \frac{x^4 z^2 + a^2 b^2 z^2 - 2 b^2 x^2 y^2}{a^4 b^2 z^4 + a^2 b^4 y^4 - 2 a^2 b^2 x^2 y^2 z^2},$$

8) Aufg. Man untersuche die Kurve, welche bei dem Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer Kugel entsteht. (Sphärische Ellipse.)

Wenn der gemeinsame Mittelpunkt beider Oberflächen der Anfangspunkt der Koordinaten ist, so wird die Kurve dargestellt durch die Gleichungen



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

aus welchen leicht die vier weiteren folgen

$$\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right) y^2 + \left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) y^2 = c^2 - r^2,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right) z^2 = b^2 - r^2,$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) y^2 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) z^2 = a^2 - r^2,$$

Die Kurve liegt sonach auf sechs verschiedenen Flächen zweiter Ordnung, unter denen sich ein Kegel und drei Zylinder befinden. Für $c = b$ zerfällt sie in zwei Kreise. Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 drei bestimmte zusammengehörige Werte von x, y, z und subtrahiert von

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) y^2 = c^2 - r^2$$

die Identität

$$\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)x_1^2+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)y_1^2=c^2-r^2,$$

so kann man die sphärische Ellipse auch darstellen durch die drei Gleichungen

$$\frac{x^2-x_1^2}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y^2-y_1^2}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z^2-z_1^2}{c^2(a^2-b^2)}.$$

Dann erhält man

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{z}\cdot\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{(c^2-a^2)(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)^2y^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{c^4}{a^2}\cdot\frac{(b^2-a^2)(b^2-r^2)}{(b^2-c^2)^2z^3}.$$

Die Gleichungen der Tangente werden

$$\frac{x(\xi-x)}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y(\eta-y)}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z(\zeta-z)}{c^2(a^2-b^2)},$$

oder

$$\frac{x\xi-x_1^2}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y\eta-y_1^2}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z\zeta-z_1^2}{c^2(a^2-b^2)}.$$

Die Gleichung der Normalebene wird

$$a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z}=0.$$

Setzt man

$$R=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}},$$

so wird die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

$$\text{bis zur } YZ\text{-Ebene}=\frac{b^2c^2rx}{(c^2-b^2)yz}\cdot R,$$

$$\text{bis zur } XZ\text{-Ebene}=\frac{a^2c^2ry}{(c^2-a^2)xz}\cdot R,$$

$$\text{bis zur } XY\text{-Ebene}=\frac{a^2b^2rz}{(b^2-a^2)xy}\cdot R.$$

Die Gleichungen der Schnittgeraden der Normalebene werden

in der YZ-Ebene $b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z}=0,$

in der XZ-Ebene $a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x}+c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z}=0,$

in der XY-Ebene $a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y}=0.$

Die Gleichung der Oskulationsebene wird

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-r^2)}{a^4}x^3.(\xi-x)+\frac{(b^2-a^2)(b^2-c^2)(b^2-r^2)}{b^4}y^3.(\eta-y)+$$
$$+\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-r^2)}{c^4}z^3(\zeta-z)=0.$$

Wenn man der Kürze wegen folgende Bezeichnung einführt:

$$M=\frac{1}{a^4b^4c^4}\left[\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2(a^2-r^2)^2}{a^8}x^6+\frac{(b^2-a^2)^2(b^2-c^2)^2(b^2-r^2)^2}{b^8}y^6+\right.$$
$$\left.+\frac{(c^2-a^2)^2(c^2-b^2)^2(c^2-r^2)^2}{c^8}z^6\right],$$

so wird der Radius der ersten Krümmung

$$=\frac{r^3R^3}{\sqrt{M}}$$

und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$X=x+\frac{xr^2R^2}{a^4b^2c^2M}(c^2-b^2)\left[\frac{(b^2-a^2)^2(b^2-r^2)}{b^6}y^4-\frac{(c^2-a^2)^2(c^2-r^2)}{c^6}z^4\right],$$

$$Y=y+\frac{yr^2R^2}{a^2b^4c^2M}(a^2-c^2)\left[\frac{(c^2-b^2)^2(c^2-r^2)}{c^6}z^4-\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-r^2)}{a^6}x^4\right],$$

$$Z=z+\frac{zr^2R^2}{a^2b^2c^4M}(b^2-a^2)\left[\frac{(a^2-c^2)^2(a^2-r^2)}{a^6}x^4-\frac{(b^2-c^2)^2(b^2-r^2)}{b^6}y^4\right].$$

Anmerkung. Infolge der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen (gemessen auf Bogen grösster Kreise) ihrer Punkte von zwei festen Punkten der Kugeloberfläche konstant ist, hat die hier untersuchte Kurve den Namen sphärische Ellipse erhalten.

Kapitel X.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung krummer Oberflächen.

§ 26. Lehrsätze.

Eine krumme Oberfläche kann allgemein gegeben werden durch drei Gleichungen, welche die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche als Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen u und v darstellen:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v).$$

Gelingt es, hieraus die Grössen u und v zu eliminieren, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z als Gleichung der Fläche

$$F(x, y, z) = 0,$$

welche durch Auflösung nach z, falls dieselbe möglich ist, die Form annimmt

$$z = f(x, y).$$

Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte x, y, z ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

oder

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Sind X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Punkte x, y, z mit den Koordinatenaxen einschliesst, so wird

$$X = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z},$$

'o

$$W=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

ler wenn die Fläche durch die Gleichung $z=f(x,y)$ gegeben ist

$$X=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$Y=-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$Z=\quad\frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ıd die Gleichungen der Normale sind demnach

$$\frac{\xi-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\zeta-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkt der Tangen-alebene bis zur

Ebene der YZ wird $\frac{x}{X}=x\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\frac{x}{\frac{\partial F}{\partial x}}\cdot W,$

Ebene der XZ wird $\frac{y}{Y}=y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\frac{y}{\frac{\partial F}{\partial y}}\cdot W,$

Ebene der XY wird $\frac{z}{Z}=z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{z}{\frac{\partial F}{\partial z}}\cdot W.$

Jede durch die Normale im Punkte x, y, z gelegte Ebene :hneidet die Fläche in einer Kurve, welche Normalschnitt ge-ınnt wird. Bildet die Tangente an den Normalschnitt im Punkte y, z die Winkel α, β, γ mit den Koordinatenaxen, so ist der rümmungsradius R des Normalschnittes

$$R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}.$$

Der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes, dessen bene durch dieselbe Tangente (α, β, γ) geht und mit der Ebene s Normalschnittes den Winkel ω bildet, hat zum Ausdruck

$$\varrho=R\cos\omega.\quad \text{(Satz von Meunier.)}$$

Unter sämtlichen Normalschnitten im Punkte x, y, z gibt es im allgemeinen zwei, deren Krümmungsradien resp. ein Maximum R_1 und ein Minimum R_2 sind. Diese Normalschnitte, deren Ebenen senkrecht auf einander stehen, werden Hauptnormalschnitte und die zugehörigen Krümmungsradien Hauptkrümmungsradien genannt. Die Richtungen der Hauptnormalschnitte sind bestimmt durch die drei Gleichungen

$$[p\,q\,t-(1+q^2)\,s]\cos^2\beta+[(1+p^2)\,t-(1+q^2)\,r]\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+[(1+p^2)\,s-p\,q\,r]\cos^2\alpha=0,$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\cos\gamma=p\cos\alpha+q\cos\beta.$$

Die quadratische Gleichung für die beiden Hauptkrümmungsradien ist

$$\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R}\left[\frac{(1+q^2)\,r-2\,p\,q\,s+(1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right]+\frac{r\,t-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=0,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{1}{R_1 R_2}=\frac{r\,t-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \qquad \text{(Gauss'sches Krümmungsmass.)}$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \text{(Mittlere Krümmung.)}$$

Zwischen dem Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnittes, dessen Ebene mit der Ebene von R_1 den Winkel φ bildet und den Hauptkrümmungsradien besteht die Beziehung

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \qquad \text{(Satz von Euler.)}$$

Ein Punkt, in welchem die Hauptkrümmungsradien und in Folge dessen die Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte einander gleich sind, heisst ein Kreispunkt oder ein Nabelpunkt der Fläche. Das Vorkommen eines Kreispunktes bedingt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{p\,q}.$$

Eine zylindrische Oberfläche entsteht im allgemeinen durch die Bewegung einer geraden Linie, die während ihrer Bewegung

einer anderen festen Geraden parallel bleibt und immer durch eine gegebene Kurve, die Leitkurve, geht.

Seien die Gleichungen der beweglichen Geraden

$$a x + b y + c z = \alpha,$$
$$a' x + b' y + c' z = \beta.$$

Hierin sind a, b, c, a', b', c' als konstant, α und β dagegen als veränderlich zu betrachten, so jedoch, dass $\beta = \varphi(\alpha)$ irgend eine Funktion von α sein muss, die von der Natur der leitenden Kurve abhängt. Demnach sind sämtliche Zylinderflächen in der Gleichung enthalten

$$a' x + b' y + c' z = \varphi(a x + b y + c z).$$

Durch partielle Differentiation nach x und y und Elimination der willkürlichen Funktion φ erhält man hieraus die partielle Differentialgleichung der Zylinderflächen

$$(c' b - c b') p + (a' c - a c') q - (b' a - b a') = 0,$$

welche ausdrückt, dass die Tangentialebene an den Zylinder beständig der Geraden $a x + b y + c z = 0$, $a' x + b' y + c' z = 0$ parallel bleibt.

Man kann diese Resultate bedeutend vereinfachen, wenn man die Gleichungen der Geraden so umformt, dass $a = 1$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 1$ wird. Die Differentialgleichung wird dann:

$$c p + c' q + 1 = 0.$$

Eine konische Oberfläche wird durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, welche beständig durch einen gegebenen festen Punkt und durch eine gegebene Kurve, die Leitkurve, geht.

In den Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C}$$

oder

$$\frac{x - a}{z - c} = \frac{A}{C} = \alpha,$$

$$\frac{y - b}{z - c} = \frac{B}{C} = \beta$$

sind a, b, c, die Koordinaten des gegebenen festen Punktes, als konstant, α und β dagegen als veränderlich anzusehen, so zwar,

dass $\beta = \varphi(\alpha)$ irgend eine von der Natur der leitenden Kurve abhängige Funktion von α ist. Die Gleichungen sämtlicher Kegelflächen sind demnach von der Form

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen

$$z-c = p(x-a) + q(y-b)$$

zeigt, dass jede Tangentialebene einer konischen Oberfläche durch den Mittelpunkt der Fläche geht.

Eine Rotationsoberfläche entsteht durch die Bewegung eines Kreises von veränderlichem Radius, dessen Mittelpunkt stets auf einer gegebenen geraden Linie (Rotationsaxe)

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$$

bleibt, während seine Ebene beständig senkrecht zu dieser Geraden ist. Ein Kreis im Raum wird bestimmt als Schnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene. Die Gleichungen des beweglichen Kreises werden demnach sein

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \beta$$
$$Ax + By + Cz = \alpha.$$

Hierin sind die Grössen a, b, c; A, B, C konstant, während zwischen den Veränderlichen α und β eine Bedingungsgleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ stattfinden muss, welche von dem Gesetze abhängt, nach welchem der Radius des beweglichen Kreises sich ändert. Die Kenntnis einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve, welche auf der Fläche liegt und durch deren Rotation man sich die Fläche entstanden denken kann, reicht im allgemeinen zur Bestimmung der Funktion φ hin. Die Gleichung der Rotationsfläche wird demnach die Gestalt haben

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \varphi(Ax + By + Cz).$$

Wählt man die Rotationsaxe als Z-Axe und ist die Gleichung der (als eben vorausgesetzten) Rotationskurve, wenn sie in die XZ-Ebene fällt: $\varphi(x, z) = 0$, so ist die Gleichung der Rotationsfläche:

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0.$$

Die partielle Differentialgleichung der Rotationsoberflächen lautet:

$$p[B(z-c)-C(y-b)]+q[C(x-a)-A(z-c)]-$$
$$-[A(y-b)-B(x-a)]=0.$$

Die Entstehung der Fusspunktfläche ist der der Fusspunktkurve analog, sie ist der Ort der von einem festen Punkte aus auf alle Tangentialebenen einer gegebenen Fläche gefällten Lote. Ihre Gleichung wird, wenn $f(x, y, z)=0$ die gegebene Fläche ist, erhalten durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen:

$$X=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

$$Y=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

$$Z=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Wird in der Gleichung einer ebenen Kurve

$$U=f(x, y, \alpha)=0$$

der Parameter α variabel gedacht, so entspricht dieser Gleichung eine ganze Schar von Kurven. Zwei Kurven der Schar, welche benachbarten Werten von α entsprechen, werden sich im allgemeinen schneiden. Für die Schnittpunkte bestehen gleichzeitig die Gleichungen

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0.$$

Die Elimination von α aus diesen Gleichungen, wenn dieselbe möglich ist, ergibt eine Relation zwischen x und y, $F(x, y)=0$, welche unabhängig von dem speziellen Wert von α ist und somit die Gleichung derjenigen Kurve darstellt, in welcher sämtliche Schnittpunkte benachbarter Kurven der Schar liegen. Diese Kurve

$F(x, y) = 0$ wird die einhüllende Kurve oder die Enveloppe, die Kurvenschar $U = 0$ dagegen die eingehüllte (enveloppée) genannt. Die einhüllende Kurve hat in jedem ihrer Punkte eine gemeinschaftliche Tangente mit der gegebenen, ihrer Form und Lage nach veränderlichen Kurve.

Denkt man sich ebenso in der Gleichung der Fläche

$$U = f(x, y, z, \alpha) = 0$$

den Parameter α stetig veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Schar von unendlich vielen Flächen dar. Zwei benachbarten Werten von α entsprechen zwei Flächen der Schar, welche sich im allgemeinen in einer Kurve schneiden, die Charakteristik genannt wird. Für dieselbe gelten demnach die Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0.$$

Durch Elimination des Parameters α aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche allen Charakteristiken zukommt. Es ist dies die Gleichung der einhüllenden Fläche. Die Schnittpunkte zweier benachbarten Charakteristiken genügen den drei Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Gelingt es, aus diesen drei Gleichungen α zu eliminieren, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche diejenige Kurve darstellen, auf welcher die Schnittpunkte je zweier benachbarter Charakteristiken liegen. Diese Kurve führt den Namen Rückkehrkante oder Wendungskurve oder Gratlinie. (Arête de rebroussement). Sie wird ebenso von allen Charakteristiken berührt, wie die einhüllende Oberfläche von allen eingehüllten.

Wenn die veränderliche Fläche, deren Gleichung $U = 0$ nur von dem einzigen willkürlichen Parameter α abhängt, eine Ebene ist, so heisst ihre Enveloppe eine developpable oder abwickelbare Fläche. In diesem Falle ist die Charakteristik eine gerade Linie, und die ganze Fläche kann als aus lauter ebenen Elementen bestehend angesehen werden. Da diese unendlich schmalen Elemente sich längs gerader Linien an einander anschliessen, so können sie in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt werden.

Zwei benachbarte Erzeugende einer abwickelbaren Fläche schneiden sich in einem Punkte; die Gesamtheit dieser Punkte bildet eine Raumkurve, die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche. Die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche sind die Tangenten der Rückkehrkante; die Ebenen, welche zwei benachbarte Erzeugende enthalten, also die Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche, sind die Oskulationsebenen der Rückkehrkante. Man kann sich daher jede abwickelbare Fläche entstanden denken sowohl als Enveloppe der Tangenten einer Raumkurve, als auch als Enveloppe der Schmiegungsebenen derselben.

Wenn

$$z = a x + b y + c$$

die Gleichung der beweglichen Ebene ist, welche in allen ihren Lagen Schmiegungsebene einer gegebenen Raumkurve sein soll, so werden die Koeffizienten b und c Funktionen von a sein, $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$, welche abhängen von der Natur der gegebenen Raumkurve. Man hat demnach

$$z = a x + \varphi(a) . y + \psi(a).$$

Denkt man sich von einem Punkte der Kurve, welcher einem speziellen Werte von a entspricht, zum nächstfolgenden übergegangen d. h. differentiiert man diese Gleichung in Bezug auf a, so erhält man

$$0 = x + y \frac{d \varphi(a)}{d a} + \frac{d \psi(a)}{d a},$$

$$0 = y \frac{d^2 \varphi(a)}{d a^2} + \frac{d^2 \psi(a)}{d a^2}.$$

Die beiden ersten Gleichungen gehören der Charakteristik der Fläche an. Gelingt es, aus denselben die Grösse a zu eliminieren, so erhält man die Gleichung der developpablen Fläche; die Elimination von a aus allen drei Gleichungen würde zwei Gleichungen zwischen x, y, z ergeben, welche der Rückkehrkante der Fläche zukommen.

Durch partielle Differentiation der ersten Gleichung erhält man

$$p = a, \quad q = \varphi(a) \quad \text{oder} \quad q = \varphi(p).$$

Eine Fläche ist daher abwickelbar, wenn zwischen p und q eine Beziehung besteht, die von x, y, z unabhängig ist. Die Gleichung $z = ax + \varphi(a) \cdot y + \psi(a)$ liefert jetzt als eine weitere Form der Gleichung einer abwickelbaren Fläche

$$z - px - qy = \psi(p).$$

Aus der Gleichung $q = \varphi(p)$ ergibt sich endlich noch

$$s = \varphi'(p) \cdot r, \quad t = \varphi'(p) \cdot s$$

und hieraus durch Elimination von $\varphi'(p)$ die partielle Differentialgleichung der developpablen Flächen

$$s^2 = rt.$$

§ 27. Beispiele.

1. Allgemeine Aufgaben.

1) Aufg. Man bestimme das Volumen der Pyramide, welche enthalten ist zwischen den Koordinatenebenen und der Tangentialebene an die Fläche

$$a^2 y^2 + x^2 z^2 = r^2 x^2$$

(Cono-cuneus von Wallis, gewöhnliches Konoid.)

Lös. Man findet für das verlangte Volumen

$$\tfrac{1}{6} \cdot \frac{x^3 z^5}{a^2 y (z^2 - r^2)}.$$

2) Aufg. Für die Fläche, deren Gleichung

$$xyz = a^3$$

ist, bestimme man: a) die Hauptkrümmungsradien, b) die Kreispunkte.

Lös. a) Die Hauptkrümmungsradien können bestimmt werden aus der quadratischen Gleichung

$$R^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)\frac{R}{D} + \frac{27a^6}{D^4} = 0,$$

wo

$$D = \frac{3a^3}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}}$$

den Abstand der Tangentialebene vom Koordinatenanfangspunkte bezeichnet.

b) Die Koordinaten der Kreispunkte sind

$$x = \pm y = \pm z = a,$$
$$-x = \pm y = \mp z = a.$$

In einem Kreispunkte ist

$$R = R_1 = R_2 = D = \sqrt{3}\,a.$$

3) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$$

von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ in den Kreispunkten berührt wird, wenn

$$r^{\frac{2n}{n-2}} = a^{\frac{2n}{n-2}} + b^{\frac{2n}{n-2}} + c^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Lös. Bestimmt man die Koordinaten eines Kreispunktes der gegebenen Fläche

$$\left(x = \frac{a^{\frac{n}{n-2}}}{\left(a^{\frac{2n}{n-2}} + b^{\frac{2n}{n-2}} + c^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{1}{n}}} \text{ und entspr.}\right)$$

und setzt dieselben in die Gleichung der Kugel, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ein, so findet man als Bedingung, dass der Kreispunkt ein Punkt der Kugel sei, die in der Aufgabe enthaltene Beziehung zwischen a, b, c und r. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind für die Koordinaten der Kreispunkte die Grössen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ für beide Flächen identisch, womit die in der Aufgabe ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

4) Aufg. Die Hauptnormalen der zylindrischen Schraubenlinie, welche gegeben ist durch die Gleichungen

$$x = m \cos\varphi, \quad y = m \sin\varphi, \quad z = n\varphi,$$

bilden die windschiefe Schraubenfläche. Man bestimme für dieselbe a) die Gleichung, b) die Tangentialebene im Punkte x, y, z und deren Abstand vom Koordinatenanfangspunkt und c) die Hauptkrümmungsradien.

Lös. a) Die Gleichungen der Hauptnormale der gegebenen Schraubenlinie sind

$$(\xi - x)\sin\varphi = (\eta - y)\cos\varphi, \quad \zeta = z,$$

oder

$$\xi \sin\varphi = \eta \cos\varphi, \qquad \zeta = n\varphi.$$

Hieraus folgt durch Elimination der Grösse φ als Gleichung der Schraubenfläche

$$\xi \sin \frac{\zeta}{n} = \eta \cos \frac{\zeta}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tang} \frac{\zeta}{n}.$$

b) Die Gleichung der Tangentialebene wird

$$y\xi - x\eta + \frac{1}{n}(x^2 + y^2)(\zeta - z) = 0;$$

der Abstand der Tangentialebene vom Koordinatenanfangspunkte ist

$$D = \frac{rz}{\sqrt{n^2 + r^2}},$$

wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt wird.

c) Die Hauptkrümmungsradien können gefunden werden aus der Gleichung

$$R^2 - \left(n + \frac{r^2}{n}\right)^2 = 0.$$

Die Schraubenfläche hat somit in jedem Punkte zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien; ihre mittlere Krümmung ist gleich Null. Es ist dies eine Eigenschaft, welche den Minimalflächen zukommt, d. h. solchen Flächen, die bei gegebener Begrenzung die kleinste Oberfläche besitzen.

2. Flächen zweiter Ordnung.

a) Das dreiaxige Ellipsoid.

Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Für einen Punkt x, y, z des Ellipsoids ist die Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} = 1.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen den Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der Tangentialebene im Punkte x, y, z mit D, so dass

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

so erhält man für die Cosinus X, Y, Z der Winkel, welche die Flächennormale in diesem Punkte mit den Koordinatenaxen einschliesst

$$X = \frac{xD}{a^2}, \quad Y = \frac{yD}{b^2}, \quad Z = \frac{zD}{c^2}.$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{a^2(\xi - x)}{x} = \frac{b^2(\eta - y)}{y} = \frac{c^2(\zeta - z)}{z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkte der zugehörigen Tangentialebene bis

$$\text{zur } YZ\text{-Ebene wird } = \frac{a^2}{D},$$

$$\text{zur } XZ\text{-Ebene wird } = \frac{b^2}{D},$$

$$\text{zur } XY\text{-Ebene wird } = \frac{c^2}{D}.$$

Die Hauptkrümmungsradien sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$R^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\frac{R}{D} + \frac{a^2 b^2 c^2}{D^4} = 0.$$

Die vier reellen Kreispunkte des Ellipsoids haben die Koordinaten

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

b) Das einschalige Hyperboloid.

Seine Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die Gleichung der Tangentialebene in dem Punkte x, y, z

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) - \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - \frac{z\zeta}{c^2} = 1;$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Flächennormale mit den Axen einschliesst, sind

$$X = \frac{xD}{a^2}, \quad Y = \frac{yD}{b^2}, \quad Z = -\frac{zD}{c^2}.$$

Normalengleichungen:

$$\frac{a^2(\xi - x)}{x} = \frac{b^2(\eta - y)}{y} = -\frac{c^2(\zeta - z)}{z}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkte der zugehörigen Tangentialebene bis

zur YZ-Ebene wird $= \frac{a^2}{D}$,

zur XZ-Ebene wird $= \frac{b^2}{D}$,

zur XY-Ebene wird $= -\frac{c^2}{D}$.

Die Hauptkrümmungsradien sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$R^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\frac{R}{D} - \frac{a^2 b^2 c^2}{D^4} = 0.$$

Reelle Kreispunkte sind nicht vorhanden.

c) Das zweischalige Hyperboloid.

Gleichung der Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) - \frac{y}{b^2}(\eta - y) - \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} - \frac{z\zeta}{c^2} = 1.$$

D hat dieselbe Grösse wie vorher.

$$X = \frac{xD}{a^2}, \quad Y = -\frac{yD}{b^2}, \quad Z = -\frac{zD}{c^2}.$$

Gleichungen der Normale:

$$\frac{a^2(\xi - x)}{x} = -\frac{b^2(\eta - y)}{y} = -\frac{c^2(\zeta - z)}{z}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkte der zugehörigen Tangentialebene bis

$$\text{zur } YZ\text{-Ebene wird} = \frac{a^2}{D},$$

$$\text{zur } XZ\text{-Ebene wird} = -\frac{b^2}{D},$$

$$\text{zur } XY\text{-Ebene wird} = -\frac{c^2}{D}.$$

Die Gleichung für die Hauptkrümmungsradien ist:

$$R^2 + (a^2 - b^2 - c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\frac{R}{D} + \frac{a^2 b^2 c^2}{D^4} = 0.$$

Die Fläche hat 4 Kreispunkte:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2}} \quad (\text{wenn } b > c)$$

oder

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}}, \quad z = 0 \quad (\text{wenn } c > b).$$

d) Das elliptische Paraboloid.

Gleichung der Fläche:

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

wobei a und b positiv sind.

Gleichung der Tangentialebene:

$$\zeta + z = \frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b},$$

$$D = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}}.$$

$$X = \frac{xD}{a^2}, \quad Y = \frac{yD}{b^2}, \quad Z = -\frac{D}{z}.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$\frac{a(\xi - x)}{x} = \frac{b(\eta - y)}{y} = \frac{\zeta - z}{-1}.$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkt der entsprechenden Tangentialebene bis zum Durchschnitt

mit der YZ-Ebene wird $= \frac{az}{D}$,

mit der XZ-Ebene wird $= \frac{bz}{D}$,

mit der XY-Ebene wird $= \frac{z^2}{D}$.

Die Hauptkrümmungsradien können bestimmt werden aus der Gleichung

$$R^2 - \frac{z}{D}(a + b + 2z)R + \frac{abz^4}{D^4} = 0.$$

Die Koordinaten der Kreispunkte sind, wenn $a > b$

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{b(a-b)}, \quad z = \frac{a-b}{2},$$

wenn $b > a$

$$x = \pm\sqrt{a(b-a)}, \quad y = 0, \quad z = \frac{b-a}{2}.$$

e) Das hyperbolische Paraboloid.

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}.$$

Tangentialebene:

$$\zeta + z = \frac{x\xi}{a} - \frac{y\eta}{b},$$

$$D = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}}.$$

$$X = \frac{x D}{a z}, \quad Y = -\frac{y D}{b z}, \quad Z = -\frac{D}{z}.$$

Gleichungen der Normale:

$$\frac{a(\xi - x)}{x} = -\frac{b(\eta - y)}{y} = -(\zeta - z).$$

Die Länge der Normale vom Berührungspunkt der betreffenden Tangentialebene

bis zur YZ-Ebene wird $= \frac{a z}{D}$,

bis zur XZ-Ebene wird $= -\frac{b z}{D}$,

bis zur XY-Ebene wird $= -\frac{z^2}{D}$.

Die Hauptkrümmungsradien liefert die Gleichung

$$R^2 - \frac{z}{D}(a - b + 2z) R - \frac{a b z^4}{D^4} = 0.$$

Kreispunkte sind nicht vorhanden.

Die übrigen eigentlichen Flächen zweiter Ordnung sind Zylinder- und Kegelflächen.

3. Zylinderflächen.

5) Aufg. Es ist die Gleichung einer zylindrischen Oberfläche zu finden, deren Erzeugenden der Geraden $\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$ parallel sind und deren Leitkurve gegeben ist durch die Gleichungen

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Lös. Bezeichnet man die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Leitkurve mit x, y, z, die laufenden Koordinaten der Zylinderfläche mit ξ, η, ζ, so können die Gleichungen einer Erzeugenden geschrieben werden

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die gesuchte Zylindergleichung ergibt sich nun, wenn man aus diesen und den Gleichungen $u=0$, $v=0$ die Veränderlichen x, y, z eliminiert. Setzt man zu diesem Zwecke die gleichen Quotienten

$$\frac{\xi-x}{A}=\frac{\eta-y}{B}=\frac{\zeta-z}{C}=\lambda,$$

so wird

$$x=\xi-A\lambda,\quad y=\eta-B\lambda,\quad z=\zeta-C\lambda.$$

Nachdem man die Grösse λ aus einer der Gleichungen $u=0$, $v=0$ bestimmt hat, erhält man die gesuchte Gleichung der zylindrischen Oberfläche durch die Substitution der Werte für x, y, z in die andere der Gleichungen $u=0$, $v=0$.

a) Wenn die leitende Kurve ein Kreis in der XY-Ebene ist, bestimmt durch die Gleichungen

$$z=0,\quad (x-A)^2+(y-B)^2=R^2;$$

und wenn die Erzeugenden der Geraden

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{1}$$

parallel sein sollen, so erhält man als gesuchte Gleichung des Zylinders

$$(\xi-a\zeta-A)^2+(\eta-b\zeta-B)^2=R^2.$$

Wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises zugleich Anfangspunkt der Koordinaten ist, so wird $A=0$ und $B=0$, und wenn die Axe des Zylinders zugleich die Z-Axe ist, so wird $a=0$ und $b=0$ und daher die Gleichung des gewöhnlichen geraden Kreiszylinders $$\xi^2+\eta^2=R^2.$$

b) Wenn die leitende Kurve eine Ellipse in der XY-Ebene ist, dargestellt durch die Gleichungen

$$z=0,\quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

und wenn verlangt wird, dass die Erzeugenden der Geraden

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{1}$$

parallel seien, so erhält man als Gleichung des Zylinders

$$\frac{(\xi-a\zeta)^2}{A^2}+\frac{(\eta-b\zeta)^2}{B^2}=1.$$

6) Aufg. Est ist der Zylinder zu bestimmen, welcher die Fläche zweiter Ordnung

$$1) \qquad a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$$

umhüllt und dessen Erzeugenden eine gegebene Richtung besitzen.

Lös. Sind die Cosinus der Winkel, welche die gegebene Richtung mit den Koordinatenaxen bildet, den Zahlen A, B, C proportional, so können die Gleichungen derjenigen Erzeugenden, welche die gegebene Fläche zweiter Ordnung im Punkte x, y, z berührt, geschrieben werden

$$2) \qquad \frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Koordinaten x, y, z der Punkte, welche der Berührungskurve angehören, genügen der partiellen Differentialgleichung der Zylinderflächen. Danach ist die Berührungskurve der Durchschnitt der gegebenen Fläche mit der Ebene

$$3) \qquad a A x + b B y + c C z = 0.$$

Die Gleichung der Zylinderfläche wird nun erhalten, indem man aus den Gleichungen 1), 2) und 3) die Veränderlichen x, y, z eliminiert.

Die gesuchte Gleichung lautet

$$(aA^2 + bB^2 + cC^2)(a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 - 1) = (aA\xi + bB\eta + cC\zeta)^2.$$

Zusatz. Wird allgemein die Gleichung des Zylinders verlangt, dessen Erzeugende den Richtungscosinus A, B, C entsprechen und welcher eine gegebene Fläche zweiter Ordnung $F(x, y, z) = 0$ umhüllt, so erhält man durch ein Verfahren, welches dem soeben angegebenen ganz analog ist, wenn man noch $F(\xi, \eta, \zeta) = u$ setzt

$$2u\left[A^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + C^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2AB\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2BC\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + 2CA\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}\right] =$$

$$= \left[A\frac{\partial u}{\partial \xi} + B\frac{\partial u}{\partial \eta} + C\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right]^2.$$

4. Kegelflächen.

7) Aufg. Man bestimme die Gleichung einer konischen Oberfläche vom Scheitel a, b, c, wenn die Leitkurve durch die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ dargestellt ist.

Lös. Sind x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Leitkurve, ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten, so ist die Erzeugende, welche durch den Punkt x, y, z geht, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - a}{x - a} = \frac{\eta - b}{y - b} = \frac{\zeta - c}{z - c}.$$

Die Elimination der Grössen x, y, z aus diesen und den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ liefert die gesuchte Gleichung der konischen Oberfläche. Werden zu diesem Zwecke die drei gleichen Quotienten $= \frac{1}{\lambda}$ gesetzt, so folgt

$$x = a + \lambda(\xi - a), \quad y = b + \lambda(\eta - b), \quad z = c + \lambda(\zeta - c).$$

Die Grösse λ kann aus einer der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ bestimmt werden. Setzt man hierauf die Werte für x, y, z in die andere der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ ein, so erhält man als Substitutionsresultat die gesuchte Gleichung.

a) Wenn die leitende Kurve eine Ellipse ist, gegeben durch die Gleichungen

$$z = h, \quad \frac{(x - p)^2}{A^2} + \frac{(y - q)^2}{B^2} = 1$$

und wenn der Scheitel die Koordinaten a, b, 0 hat, so erhält man als Gleichung der konischen Oberfläche

$$A^2[(\eta - b)h + (b - q)\zeta]^2 + B^2[(\xi - a)h + (a - p)\zeta]^2 = A^2 B^2 \zeta^2.$$

Wenn die leitende Kurve ein Kreis ist, so hat man nur $A = B = r$ zu setzen.

b) Wenn die leitende Kurve eine Lemniskate ist

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = r^2 \, . \, (x^2 - y^2),$$

und der Scheitel die Koordinaten a, b, c haben soll, so ergibt sich für die mit dieser Basis gebildete konische Oberfläche

$$[(a\zeta - c\xi)^2 + (b\zeta - c\eta)^2]^2 = r^2 \, . \, (\zeta - c)^2 \, . \, [(a\zeta - c\xi)^2 - (b\zeta - c\eta)^2].$$

c) Wenn die leitende Kurve eine Parabel ist

$$z = 0, \quad y^2 = 2px,$$

und der Scheitel die Koordinaten a, b, c hat, so erhält man als Gleichung der konischen Oberfläche

$$(b\zeta - c\eta)^2 = 2p(\zeta - c)(a\zeta - c\xi).$$

8) Aufg. Man bestimme den Kegel vom Scheitel a, b, c, welcher die Fläche zweiter Ordnung

$$F(x, y, z) = 0$$

umhüllt.

Lös. Bezeichnet man der Kürze wegen $F(a, b, c)$ mit u und beachtet, dass nach der partiellen Differentialgleichung der Kegelflächen die Berührungskurve der Durchschnitt der Fläche $F(x, y, z) = 0$ mit der Fläche

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-c) = 0$$

ist, so erhält man als Gleichung des Berührungskegels

$$2u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(\xi-a)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}(\eta-b)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}(\zeta-c)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b}(\xi-a)(\eta-b) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c}(\eta-b)(\zeta-c) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial a}(\zeta-c)(\xi-a)\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial u}{\partial a}(\xi-a) + \frac{\partial u}{\partial b}(\eta-b) + \frac{\partial u}{\partial c}(\zeta-c)\right]^2.$$

9) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo φ eine beliebige Funktion bezeichnet, durch einen und denselben Punkt gehen.

Lös. Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\zeta - z = \frac{z}{x}(\xi - x) + \frac{x\eta - y\xi}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

und man erkennt, dass alle Tangentialebenen durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen. Die vorgelegte Gleichung ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze der Koordinatenanfangspunkt ist.

5. Rotationsflächen.

10) Aufg. Es soll die Gleichung der Fläche abgeleitet werden, welche entsteht, wenn eine gegebene Kurve $u = 0$, $v = 0$ um eine gegebene Gerade $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$ als Axe rotiert.

Lös. Durch die Elimination der Veränderlichen x, y, z aus den vier Gleichungen

$$u = 0, \quad v = 0,$$

$$Ax + By + Cz = \alpha, \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \varphi(\alpha)$$

wird im allgemeinen die Natur der Funktion φ bestimmt, und man erhält dann als gesuchte Gleichung der Rotationsfläche

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = \varphi(A\xi + B\eta + C\zeta).$$

Wenn die Wahl des Koordinatensystems frei steht, so wird man zweckmässig die Rotationsaxe zu einer der Koordinatenaxen, etwa zur Z-Axe machen. Dann ist jeder ebene, zur Z-Axe senkrechte Schnitt ein Kreis, und es wird daher die Gleichung der Rotationsoberfläche von der Form sein

$$\xi^2 + \eta^2 = \psi(\zeta).$$

Da die Koordinaten x, y, z irgend eines Punktes der Kurve $u = 0$, $v = 0$ der Gleichung der Fläche genügen müssen, so kann die Funktion $\psi(z)$ dadurch bestimmt werden, dass man aus den Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ die Grösse $x^2 + y^2$ als Funktion von z berechnet.

a) Wenn in der XZ-Ebene eine Ellipse mit den beiden Halbaxen A und B und den Mittelpunkts-Koordinaten p und q gegeben ist und wenn die Z-Axe zugleich die Drehungsaxe ist, so lautet die Gleichung der Oberfläche:

$$p + \frac{A}{B}\sqrt{B^2 - (\zeta - q)^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Gestalt der Fläche hängt wesentlich von den Annahmen $p \gtreqless A$ ab.

Wenn der Mittelpunkt der Ellipse zugleich Anfangspunkt der Koordinaten ist, also $p = 0$ und $q = 0$, so wird

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{A^2} + \frac{\zeta^2}{B^2} = 1$$

die Gleichung eines Rotationsellipsoids, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die Z-Axe entstanden ist.

b) Wenn die rotierende Kurve eine gerade Linie in der XZ-Ebene und die Rotationsaxe wieder die Z-Axe ist, so erhält man als Gleichung der Oberfläche

$$A\zeta + B = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

welche einen Kegel darstellt. Geht die erzeugende Gerade durch den Anfangspunkt der Koordinaten, ist also $B = 0$, dann liegt der Scheitel des Kegels in diesem Anfangspunkt und die Gleichung wird

$$\xi^2 + \eta^2 = A^2 . \zeta^2,$$

wo A die Tangente des Winkels bedeutet, welchen die Seitenlinie des Kegels mit dessen Axe bildet.

11) Aufg. Das Rotationsellipsoid

$$1)\qquad \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

rotiere um die Z-Axe.

Welches ist die Gleichung der dadurch entstehenden Rotationsfläche?

Lös. Da die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Berührungskurve der partiellen Differentialgleichung der Rotationsflächen genügen, so hat man die Beziehung

$$2)\qquad \beta x - \alpha y = 0,$$

und es ist somit die Berührungskurve die Schnittkurve der Fläche 1) mit der Ebene 2). Die gesuchte Gleichung wird

$$\frac{[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \mp \sqrt{\xi^2 + \eta^2}]^2}{a^2} + \frac{(\zeta - \gamma)^2}{c^2} = 1.$$

Die Aufgabe lässt sich auch leicht durch Zurückführung auf Aufg. 10a lösen.

12) Aufg. Es soll gezeigt werden, dass die Fläche

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = r^3$$

eine Rotationsfläche ist.

Lös. Indem man zeigt, dass die Gleichung der partiellen Differentialgleichung der Rotationsflächen genügt, findet man für die Rotationsaxe die Gleichungen $x = y = z$.

13) Aufg. Es soll die Rotationsfläche untersucht werden, die entsteht, wenn die gewöhnliche Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \quad z = 0$$

um ihren Durchmesser rotiert.

Lös. Die Gleichung dieser Fläche wird

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2 - z^2).$$

Wenn man der Kürze wegen $x^2+y^2+z^2=m^2$ setzt und dabei x als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen y und z betrachtet, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y\,.\,(a^2+2\,m^2)}{x\,.\,(a^2-2\,m^2)},\qquad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{z\,(a^2+2\,m^2)}{x\,(a^2-2\,m^2)},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{(a^4-4\,m^4)\,.\,[(a^2-2\,m^2)\,x^2-(a^2+2\,m^2)\,y^2]+16\,a^4\,x^2\,y^2}{x^3\,.\,(a^2-2\,m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}=\frac{y\,z\,.\,[16\,a^4\,x^2-(a^4-4\,m^4)\,(a^2+2\,m^2)]}{x^3\,.\,(a^2-2\,m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\frac{(a^4-4\,m^4)\,.\,[(a^2-2\,m^2)\,x^2-(a^2+2\,m^2)\,z^2]+16\,a^4\,x^2\,z^2}{x^3\,.\,(a^2-2\,m^2)^3}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene wird

$$(2\,m^2-a^2)\,x\,.\,\xi+(2\,m^2+a^2)\,y\,.\,\eta+(2\,m^2+a^2)\,z\,.\,\zeta=m^4.$$

Es werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Koordinatenaxen bildet

$$X=\frac{x\,.\,(2\,m^2-a^2)}{a^2\,m},$$

$$Y=\frac{y\,.\,(2\,m^2+a^2)}{a^2\,m},$$

$$Z=\frac{z\,.\,(2\,m^2+a^2)}{a^2\,m},$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{\xi-x}{(2\,m^2-a^2)\,x}=\frac{\eta-y}{(2\,m^2+a^2)\,y}=\frac{\zeta-z}{(2\,m^2+a^2)\,z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt der zugehörigen Tangentialebene bis zum Durchschnitt

mit der YZ-Ebene wird $=\dfrac{a^2\,m}{a^2-2\,m^2}=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2\,x^2-2\,y^2-2\,z^2}$,

mit der XZ-Ebene wird $=\dfrac{a^2\,m}{a^2+2\,m^2}=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2\,x^2+2\,y^2+2\,z^2}$,

mit der XY-Ebene wird $=\dfrac{a^2\,m}{a^2+2\,m^2}=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2\,x^2+2\,y^2+2\,z^2}$.

Wenn man die Krümmungshalbmesser der kleinsten und grössten Krümmung mit R_1 und R_2 und die Koordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte mit α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 bezeichnet, so erhält man für diese Stücke folgende Ausdrücke:

$$R_1 = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad R_2 = \frac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2};$$

$$\alpha_1 = \frac{(x^2+y^2+z^2+a^2)\,.\,x}{3\,(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \alpha_2 = \frac{2\,a^2\,x}{a^2+2\,x^2+2\,y^2+2\,z^2},$$

$$\beta_1 = \frac{(x^2+y^2+z^2-a^2)\,.\,y}{3\,(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \beta_2 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{(x^2+y^2+z^2-a^2)\,.\,z}{3\,(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \gamma_2 = 0,$$

14) Aufg. Die Lemniskate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2), \quad z = 0$$

rotiert um die Y-Axe. Es soll die entstehende Rotationsfläche untersucht werden.

Lös. Die Gleichung dieser Rotationsfläche ist

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2+z^2).$$

Wenn man hier ebenso wie vorhin $x^2+y^2+z^2 = m^2$ setzt, und dabei y als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und z betrachtet, so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x\,(a^2-2\,m^2)}{y\,(a^2+2\,m^2)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z\,(a^2-2\,m^2)}{y\,(a^2+2\,m^2)},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(a^4-4\,m^4)\,.\,[(a^2+2\,m^2)\,y^2-(a^2-2\,m^2)\,x^2]-16\,a^4\,x^2\,y^2}{y^3\,(a^2+2\,m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} = \frac{-x\,z\,[16\,a^4\,y^2+(a^4-4\,m^4)\,(a^2-2\,m^2)]}{y^3\,(a^2+2\,m^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{(a^4-4\,m^4)\,.\,[(a^2+2\,m^2)\,y^2-(a^2-2\,m^2)\,z^2]-16\,a^4\,y^2\,z^2}{y^3\,(a^2+2\,m^2)^3}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene an einen Punkt (x, y, z) wird

$$x\,(2\,m^2-a^2)\,\xi + y\,(2\,m^2+a^2)\,\eta + z\,(2\,m^2-a^2)\,\zeta = m^4.$$

Ferner werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Koordinatenaxen bildet

$$X = \frac{x\,(2\,m^2-a^2)}{a^2\,m},$$

$$Y = \frac{y\,(2\,m^2+a^2)}{a^2\,m},$$

$$Z = \frac{z\,(2\,m^2-a^2)}{a^2\,m}.$$

Die Gleichungen der Normale werden

$$\frac{\xi - x}{(2m^2 - a^2)x} = \frac{\eta - y}{(2m^2 + a^2)y} = \frac{\zeta - z}{(2m^2 + a^2)z}.$$

Die Länge der Normallinie vom Punkte (x, y, z) bis zum Durchschnitt

$$\text{mit der } YZ\text{-Ebene wird} = \frac{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2},$$

$$\text{mit der } XZ\text{-Ebene wird} = \frac{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2},$$

$$\text{mit der } XY\text{-Ebene wird} = \frac{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}.$$

Wenn hier auch wieder die Radien der kleinsten und grössten Krümmung mit R_1 und R_2 und die Koordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte mit α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 bezeichnet werden, so erhält man

$$R_1 = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad R_2 = \frac{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2};$$

$$\alpha_1 = \frac{x(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)}{3(x^2 + y^2 + z^2)}, \qquad \alpha_2 = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{y(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)}{3(x^2 + y^2 + z^2)}, \qquad \beta_2 = \frac{2a^2 y}{a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{z(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)}{3(x^2 + y^2 + z^2)}, \qquad \gamma_2 = 0.$$

6. Enveloppen.

15) Aufg. Es ist eine ebene Kurve gegeben, und auf ihr bewegt sich der Mittelpunkt einer Kugel; man soll die einhüllende Oberfläche dieser beweglichen Kugel finden.

Lös. Wenn man die Ebene der Kurve zur XY-Ebene annimmt, so sei $\beta = \varphi(\alpha)$ die Gleichung der Kurve; ferner sei r der Radius der bewegten Kugel und α die Abszisse ihres Mittelpunktes bei irgend einer Lage; alsdann wird

$$(x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel. Wenn man aus dieser und aus ihrem in Bezug auf α gebildeten ersten Differentialquotienten, nämlich

$$(x-\alpha)+[y-\varphi(\alpha)]\cdot\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0,$$

die Grösse α eliminiert, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Oberfläche.

a) Wenn die ebene Kurve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel des Radius r bewegt, ein Kreis mit dem Radius ϱ ist und wenn dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten ist, so dass seine Gleichung $\beta^2+\alpha^2=\varrho^2$ wird, so hat man

$$(x-\alpha)^2+(y-\sqrt{\varrho^2-\alpha^2})^2+z^2=r^2,$$

$$x\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}-y\,\alpha=0.$$

Eliminiert man hieraus die Grösse α, so wird die Gleichung der einhüllenden Oberfläche

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{r^2-z^2}=\varrho.$$

Die beiden vorangehenden Gleichungen zusammengenommen stellen die zu dem speziellen Wert von α gehörige Charakteristik dieser Oberfläche dar. Ihre Projektion auf die XY-Ebene ist

$$x\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}=y\,\alpha,$$

eine gerade Linie, und ihre Projektion auf die XZ-Ebene

$$(x-\alpha)^2\cdot\frac{\varrho^2}{\alpha^2}+z^2=r^2,$$

eine Ellipse.

Es ist also die Charakteristik eine ebene Kurve und zwar ein Kreis vom Radius r, dessen Ebene senkrecht auf der XY-Ebene steht. Die Spurlinie dieser Ebene macht mit der X-Axe einen Winkel, dessen Cosinus $=\frac{\alpha}{\varrho}$ ist.

b) Wenn die leitende Kurve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel vom Radius r bewegt, eine Ellipse mit den beiden Halbaxen a und b ist und wenn der Mittelpunkt der Ellipse der Anfangspunkt der Koordinaten, so dass ihre Gleichung $\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}=1$ ist, so wird

$$(x-\alpha)^2+(y-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2})^2+z^2=r^2,$$

also erhält man durch Differentiation in Bezug auf α

$$a^2 x = \left[(a^2 - b^2) + \frac{a b y}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}\right] . \alpha.$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen α eliminiert, was allerdings ausführbar ist, aber ein sehr unerquickliches Resultat gibt, so hat man die Gleichung der einhüllenden Oberfläche. — Nimmt man aber hierzu noch die durch zweimalige Differentiation entstehende Gleichung

$$0 = a^2 - b^2 + \frac{a^3 b y}{(a^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und eliminiert nun aus diesen drei Gleichungen die Grösse α, so erhält man als die beiden zusammengehörigen Gleichungen der Rückkehrkante der Oberfläche

$$x = \frac{1}{a}\left[(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} + (b\,y)^{\frac{2}{3}}\right] . \sqrt{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (b\,y)^{\frac{2}{3}}},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (b\,y)^{\frac{2}{3}} (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}} = r^2 + a^2 - 2\,b^2.$$

c) Wenn die leitende Kurve wieder wie in dem ersten Beispiel ein Kreis mit dem Radius ϱ in der $X\,Y$-Ebene ist, also seine Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2$ und wenn sich auf seiner Peripherie der Mittelpunkt eines Ellipsoids mit den drei Halbaxen a, b, c so bewegt, dass dieselben stets parallel mit der X-, Y-, Z-Axe bleiben, so hat man

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Durch die erste Differentiation in Bezug auf α ergibt sich

$$\frac{x}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2\,b^2} . \alpha - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} = 0,$$

und durch die zweite

$$(\varrho^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2\,\varrho^2\,y}{a^2 - b^2}.$$

Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen α, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche, was aber ein unbequemes Resultat gibt; eliminiert man aber aus allen dreien die Grösse α, so erhält man als die beiden Gleichungen ihrer Rückkehrkante

$$(b^2 \varrho^2 x)^{\frac{2}{3}} + (a^2 \varrho^2 y)^{\frac{2}{3}} = \varrho^2 (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{3(a^2 \varrho^2 y)^{\frac{2}{3}} (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2 b^2} = 1 - \frac{\varrho^2 (2a^2 - b^2)}{a^2 b^2}.$$

Wenn das Ellipsoid durch Rotation um die Z-Axe entstanden ist, so wird $a = b$, und es ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Oberfläche

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho + \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

16) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und von einem zweiten gegebenen Punkt gleichen Abstand haben. Die Entfernung beider Punkte sei d.

Lös. Wählt man den zweiten gegebenen Punkt zum Koordinatenanfang und die Verbindungsgerade der beiden gegebenen Punkte zur Z-Axe, so hat man die Enveloppe der Ebenen

$$ax + by + z = d$$

zu bestimmen, wobei die variablen Parameter a und b durch die Relation

$$p = \frac{d}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

mit einander verbunden sind, welche ausdrückt, dass der Abstand einer jeden Ebene vom Koordinatenanfangspunkt gleich p sein soll. Man erhält als Enveloppe den Kreiskegel, dessen Gleichung lautet:

$$(d^2 - p^2)(x^2 + y^2) - p^2 (d - z)^2 = 0.$$

17) Aufg. Man bestimme die Enveloppe der Ebenen

$$Ax + By + Cz = 0$$

wenn zwischen den variablen Parametern A, B, C und D die Gleichungen bestehen

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

$$\frac{A^2}{D^2 - a^2} + \frac{B^2}{D^2 - b^2} + \frac{C^2}{D^2 - c^2} = 0.$$

Lös. Differentiiert man die drei gegebenen Gleichungen nach A, B, C, D, multipliziert die erhaltenen Gleichungen beziehungsweise mit λ, $\frac{-\mu}{2}$, $\frac{-1}{2}$ und addiert sie, so erhält man dadurch,

dass man die Koeffizienten von dA, dB, dC, dD gleich Null setzt, die Gleichungen

$$1)\quad \lambda x = A\mu + \frac{A}{D^2 - a^2},$$

$$2)\quad \lambda y = B\mu + \frac{B}{D^2 - b^2},$$

$$3)\quad \lambda z = C\mu + \frac{C}{D^2 - c^2},$$

$$4)\quad \lambda = D\left[\frac{A^2}{(D^2-a^2)^2} + + \frac{B^2}{(D^2-b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2-c^2)^2}\right].$$

Multipliziert man hierauf 1), 2) und 3) resp. mit A, B, C und addiert, so folgt

$$5)\quad \lambda D = \mu;$$

multipliziert man dagegen dieselben Gleichungen mit x, y, z und addiert, so kommt, wenn man der Kürze wegen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ setzt

$$\lambda R^2 = D\mu + \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}$$

oder in Folge von 5)

$$6)\quad \lambda(R^2 - D^2) = \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}.$$

Erhebt man beide Seiten von 1), 2), 3) ins Quadrat und addiert, so ergibt sich

$$\lambda^2 R^2 - \mu^2 = \frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}.$$

Es wird daher nach 4) und 5)

$$\lambda = \frac{1}{D(R^2 - D^2)}, \quad \mu = \frac{1}{R^2 - D^2}.$$

Setzt man diese Werte in 1), 2), 3) ein, so folgt

$$\frac{x}{R^2 - a^2} = \frac{AD}{D^2 - a^2},$$

$$\frac{y}{R^2 - b^2} = \frac{BD}{D^2 - b^2},$$

$$\frac{z}{R^2 - c^2} = \frac{CD}{D^2 - c^2}.$$

Multipliziert man endlich diese Gleichungen resp. mit x, y, z und addiert unter Berücksichtigung des Wertes λ und der Gleichung 6), so folgt als Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$\frac{x^2}{R^2 - a^2} + \frac{y^2}{R^2 - b^2} + \frac{z^2}{R^2 - c^2} = 1,$$

oder indem man links die Grösse $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2}$, rechts die ihr gleiche Grösse 1 subtrahiert

$$\frac{a^2 x^2}{R^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{R^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{R^2 - c^2} = 0.$$

Es stellt diese Gleichung die Wellenfläche von Fresnel dar, welche in der Optik ihre Anwendung findet. (Vergl. Mémoires de l'Institut, t. VII, pag. 136).

7. Fusspunktflächen.

18) Aufg. Man bestimme a) die Fusspunktfläche des dreiaxigen Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ für den Koordinatenanfangspunkt als Pol, b) deren Tangentialebene, c) den Abstand der letzteren vom Koordinatenanfangspunkt.

Lös. a) Als Gleichung der gesuchten Fusspunktfläche findet man

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

b) als Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der Fusspunktfläche

$$(2 r^2 - a^2) x \xi + (2 r^2 - b^2) y \eta + (2 r^2 - c^2) z \zeta = r^4,$$

wo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt wurde.

c) der Abstand dieser Tangentialebene vom Koordinatenanfangspunkte wird

$$D = \frac{r^4}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}}.$$

Die hier behandelte Fusspunktfläche ist die Elastizitätsfläche von Fresnel, welche in der Theorie des Lichtes von grosser Wichtigkeit ist. (Fresnel, Mémoires de l'Institut, t. VIII, pag. 130).

Man beweise, dass man dieselbe Fläche auch durch Abbildung durch reziproke Radien ($r \varrho = R^2$) aus dem Ellipsoid:

$$\frac{a^2 x^2}{R^4} + \frac{b^2 y^2}{R^4} + \frac{c^2 z^2}{R^4} = 1$$

erhalten kann. Eine analoge Untersuchung lässt sich auch bei den nächsten Aufgaben durchführen.

19) **Aufg.** Es sollen dieselben Stücke der Fusspunktfläche des einschaligen Hyperboloids bestimmt werden.

Lös. Gleichung der gesuchten Fläche:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 = r^4,$$

Gleichung ihrer Tangentialebene:

$$(2 r^2 - a^2) x \xi + (2 r^2 - b^2) y \eta + (2 r^2 + c^2) z \zeta = r^4;$$

$$D = \frac{r^4}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}}.$$

20) **Aufg.** Man untersuche ebenso die Fusspunktfläche des zweischaligen Hyperboloids.

Lös. Gleichung der Fläche:

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 - c^2 z^2 = r^4,$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$(2 r^2 - a^2) x \xi + (2 r^2 + b^2) y \eta + (2 r^2 + c^2) z \zeta = r^4.$$

D wie vorher.

21) **Aufg.** Welches ist die Fusspunktfläche der Fläche $x y z = a^3$ für den Koordinatenanfangspunkt als Pol?

Lös. Die Gleichung der gesuchten Fläche ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 3 a \sqrt[3]{\xi \eta \zeta}.$$

(In den Exercices méthodiques de calcul différentiel von Brahy ist pag. 215 irrtümlich $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ als Gleichung der Fusspunktfläche angegeben.)

Nachtrag.

Die Erläuterung zu § 23, 7 (Enveloppen) findet sich auf pag. 279.

Druck von C. A. Kaemmerer & Co., Halle a. S.

auc

Fläch

r⁴;

des

y